ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 3 MARS 1941.

PRÉSIDENCE DE M. HYACINTHE VINCENT.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Applications du calcul des probabilités aux problèmes concernant les nombres premiers. Théorème de Goldbach.* Note de M. **Émile Borel**.

J'ai entrepris, il y a quelques années, des recherches statistiques variées sur les nombres premiers [1] et j'ai eu l'occasion d'exposer certains de leurs résultats dans mes cours. Je voudrais résumer brièvement aujourd'hui les conclusions essentielles auxquelles j'ai été conduit et les appliquer au théorème de Goldbach et à ses généralisations.

La conclusion générale à laquelle j'ai été conduit est la suivante : soit E un ensemble fini de nombres entiers; soit N leur nombre, A et B leurs limites inférieure et supérieure; on supposera $B < A + \sqrt{A}$; soit f la fréquence moyenne des nombres premiers dans l'intervalle $B - A$; le nombre probable des nombres premiers de l'ensemble E est Nf. *Si la définition de l'ensemble* E, *jointe aux propriétés arithmétiques les plus élémentaires, n'entraîne pas la conséquence que le nombre réel n des nombres premiers de E doive être inférieur ou supérieur à* $Nf = \nu$, *on a le droit d'appliquer le théorème de Poisson et d'affirmer que la probabilité pour que ce nombre (des nombres premiers de* E) *soit égal à n est*

$$p_n = \frac{\nu_n}{n!} e^{-\nu}.$$

(1) Je dois remercier M. Z. Sougarev, dont l'aide m'a été précieuse pour les computations exigeant l'emploi des tables de nombres premiers.

Par suite les valeurs de n pour lesquelles p_n serait extrêmement petit, inférieur par exemple à 10^{-50}, pourront être exclues et l'on pourra donc affirmer que n est compris entre certaines limites n' et n''.

Ceci s'étend aisément au cas où, au lieu d'un ensemble E, on en considère un nombre fini $E_1, E_2, \ldots, E_k$.

Passons au cas où l'on considère une infinité d'ensembles E; désignons par p_k la probabilité calculée, comme il vient d'être dit, pour que le nombre n_k des nombres premiers de l'ensemble E_k ne soit pas compris entre n'_k et n''_k. Si la série Σp_k est convergente et a une somme inférieure à 10^{-50}, on pourra affirmer, avec une absolue certitude pratique que l'on a, pour toutes les valeurs de k,

$$n'_k < n_k < n''_k.$$

Appliquons ce qui précède au théorème de Goldbach, suivant lequel tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers :

$$2a = p + p'.$$

Nous préciserons ce théorème en ajoutant que l'un des nombres premiers est inférieur à une fonction donnée $\varphi(a)$:

$$p' < \varphi(a) < \sqrt{a}.$$

Soit A le nombre des nombres premiers inférieurs à $\varphi(a)$; considérons l'ensemble E_a des nombres $2a - p'$; cet ensemble est composé de A nombres; si f est la fréquence des nombres premiers dans l'intervalle $2a, 2a - \sqrt{a}$, le nombre moyen des nombres premiers de E_a serait $\nu_a = Af$; la probabilité pour que le nombre réel des nombres premiers de E_a soit nul, c'est-à-dire pour que notre théorème soit faux est $e^{-\nu_a}$. Si donc la fonction $\varphi(a)$ est choisie de telle manière que la série

$$\text{(S)} \qquad \sum_{a=\alpha}^{\infty} e^{-\nu_a}$$

soit convergente et inférieure à 10^{-50}, notre théorème sera pratiquement certain. Le nombre α sera pris assez grand et tel cependant que le théorème puisse être vérifié empiriquement pour les valeurs de a inférieures à α.

En fait, le raisonnement précédent doit être complété, car nous sommes ici dans le cas où les propriétés arithmétiques élémentaires modifient la fréquence f. Lorsqu'un nombre est choisi au hasard, la probabilité pour

qu'il soit divisible par 3 est 1/3. Si p' est un nombre premier et si $2a$ est divisible par 3, la probabilité pour que $2a-p'$ soit divisible par 3 est nulle; si $2a$ n'est pas divisible par 3, la probabilité pour que $2a-p'$ soit divisible par 3 est 1/2. Par suite, la fréquence f devra être diminuée si $2a$ n'est divisible par aucun des petits nombres premiers impairs (de 3 à 97 par exemple) et notablement augmentée si $2a$ admet les diviseurs 3, 5, 7.

Les calculs suivants ont été faits pour $1\,000\,000 < 2a \leq 1\,000\,200$. On a supposé $p' < 10000$ et on a dénombré les nombres premiers p égaux à $2a-p'$. Voici les résultats de ce dénombrement classés d'après les petits diviseurs premiers impairs de a.

Tous les diviseurs impairs de a sont > 13 : 110, 106, 104, 115, 131, 123, 132, 133, 121, 118, 119, 118, 112, 127, 110, 128, 108, 123, 119, 115, 124, 117, 123, 112, 113, 126, 130, 115, 116, 123, 120, 115, 115, 126, 118, 131, 131, 124, 111, 123.

a divisible par
- 13 : 137, 123, 126.
- 11 : 132, 137, 137.
- 7 : 145, 138, 143, 158, 144, 149, 144.
- 5 : 166, 148, 176, 160, 172, 157, 178, 160, 149, 162, 168.
- 5 et par 7 : 191, 211.
- 3 : 246, 257, 234, 238, 256, 243, 237, 231, 232, 226, 226, 230, 273, 248, 254, 219, 233, 238, 231, 262, 233, 238, 267.
- 3 et par 7 : 280, 282, 270, 278.
- 3 et par 5 : 310, 299, 345, 329, 312, 311.
- 3, par 5 et par 7 : 370.

Ces résultats sont, on s'en assure aisément, tout à fait semblables à ceux que donnerait le hasard, en ce qui concerne notamment les écarts par rapport aux valeurs moyennes [2].

Pour tous ceux qui ont l'habitude des suites statistiques de nombres entiers, le caractère fortuit de ces séries de nombres, en particulier de la première (les diviseurs impairs de a sont supérieurs à 13) s'impose avec évidence [3].

---

(2) Des résultats absolument analogues ont été obtenus pour les nombres $2a$ compris entre 2 000 000 et 2 000 200.

(3) Nous avons tenu à donner les nombres bruts constatés; on pourrait faciliter l'étude des séries de ces nombres obtenus dans les cas où a est divisible par des petits nombres premiers de manière à les ramener à ce qu'ils seraient si cette circonstance ne se produisait pas; par exemple les nombres obtenus pour a divisibles par 3 devraient être divisés par 2 etc. On aurait ainsi 100 nombres dont la répartition serait celle qui résulte du théorème de Poisson, c'est-à-dire une répartition gaussienne.

On constate que, si l'on prend

$$\varphi(a) = 50(\log a)^3,$$

en désignant par log les logarithmes vulgaires (à base 10), la condition relative à la série (S) est satisfaite. On peut donc énoncer ce résultat : *tout nombre pair* $2a$ *est la somme de deux nombres premiers dont l'un est inférieur à* $50(\log a)^3$. *La probabilité pour que cet énoncé soit faux est inférieure à* 10^{-50}.

Bien entendu, ces démonstrations basées sur les probabilités ne peuvent être comparées aux démonstrations rigouseuses de la théorie des nombres. Les recherches tendant à obtenir de telles démonstrations rigoureuses continueront à être poursuivies car, même si elles n'aboutissent pas, elles contribuent à enrichir la science de méthodes nouvelles et de résultats souvent intéressants.

Il serait cependant injuste de considérer comme négligeables les résultats que l'on peut déduire du calcul des probabilités. Ils entraîneront la conviction de tous ceux qui ont réfléchi quelque peu sur la signification d'une probabilité inférieure à 10^{-50} ou 10^{-100} et ont compris qu'une telle probabilité doit être pratiquement traitée comme égale à zéro (lorsqu'il s'agit soit d'une épreuve unique, soit d'un ensemble fini ou infini d'épreuves, considéré comme une épreuve unique dont on a calculé la probabilité globale).

Il est à peine besoin d'ajouter que le calcul des probabilités peut être utilisé non seulement comme une méthode de démonstration, mais aussi et surtout comme un instrument de recherche.

CORRESPONDANCE.

M. **Georges-Albert Boutry** adresse des remercîments pour la distinction que l'Académie a accordée à ses travaux.

ARITHMÉTIQUE. — *Courbes réduites dans les classes de courbes de genre* 1. Note de M. **François Châtelet**, présentée par M. Gaston Julia.

1. J'ai introduit [1] la notion de *sur-classe* (par rapport au corps R des nombres rationnels) de courbes algébriques de genre 1 à coefficients

[1] *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 1352.

dans R; une sur-classe S peut être définie par une *cubique de Weierstrass* C, contenue dans S :

$$y^2 = x^3 - px - q \qquad (p \text{ et } q \text{ dans R}, \ 4p^3 - 27q^2 \neq 0).$$

La condition pour qu'une courbe γ de S soit dans une classe (par rapport à R) donnée peut être exprimée à l'aide des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de C, dont les arguments elliptiques sont les nombres $c_1, c_2, \ldots, c_n$ définis dans cette Note.

Ces définitions et ces résultats s'étendent aux courbes de genre 1 dont les coefficients sont dans un corps algébrique fini k.

J'ai pu les compléter en introduisant dans chaque classe, par rapport à k, des courbes réduites W_n, dépendant d'un entier n, que j'appelle *courbes de Weil* ([2]). Ces courbes permettent de construire, dans la sur-classe, la suite des classes et de réaliser un mode de composition de ces classes entre elles. Dans le cours des démonstrations, j'ai en outre précisé toutes les valeurs que peut prendre l'ensemble $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

2. Pour simplifier l'exposé, je n'envisage que les courbes W_n relatives à un corps k qui contient les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et les coordonnées des points de C dont l'argument est le quotient par n de l'une des périodes. La construction et les propriétés, résumées ici, sont encore valables, moyennant quelques complications, pour les courbes de Weil relatives à un corps quelconque.

Les coordonnées X, Y du point de C d'argument elliptique $n.u$ sont des fonctions rationnelles dans k des coordonnées x, y du point de C d'argument u

$$X = f(x, y), \qquad Y = f'(x, y).$$

A. Weil a montré (moyennant l'hypothèse faite sur k) qu'il existe dans k des couples de fonctions rationnelles $g_i(u, v)$ et $\alpha_i(u, v)$, qui sont liées entre elles par l'identité

$$g_i[f(x, y), f'(x, y)] = [\alpha_i(x, y)]^n.$$

On peut choisir deux de ces fonctions g_1 et g_2 telles que la courbe d'un espace à quatre dimensions (X, Y, Z, Z'),

$$W_n(1, 1) \qquad \begin{cases} Y^2 = X^3 - pX - q, \\ g_1(X, Y) = Z^n, \qquad g_2(X, Y) = Z'^n, \end{cases}$$

([2]) A. Weil n'a envisagé que des cas particuliers de ces courbes; mais ses travaux m'ont sugéré la définition générale et les propriétés des courbes W_n.

soit dans la classe, par rapport à k, qui contient C. La courbe $W_n(a, a')$, définie dans l'espace (X, Y, Z, Z') par le système d'équations

$$Y^2 = X^3 - pX - q,$$
$$g_1(X, Y) = aZ^n, \qquad g_2(X, Y) = a'Z'^n,$$

dont les coefficients a et a' sont des nombres arbitraires de k, est une courbe de S.

J'appelle les courbes $W_n(a, a')$, *courbes de Weil*, d'ordre n, relatives à la cubique C et au corps k.

3. Je définis le produit de deux courbes W_n par la relation

$$W_n(a_1, a'_1) \times W_n(a_2, a'_2) = W_n(a_1 a_2, a'_1 a'_2).$$

Deux courbes W_n sont équivalentes, par rapport à k, si leur quotient (défini par a_1/a_2, a'_1/a'_2) est équivalent à C [ou à W_n (1, 1)].

Le groupe g des courbes W_n équivalentes à C contient comme sous-groupe g' l'ensemble des courbes

$$W_n(b^n, b'^n) \quad (b \text{ et } b' \text{ nombres de } k).$$

En outre, il résulte des travaux de Weil que g' est l'index fini par rapport à g et que g/g' est isomorphe mériédriquement au groupe des points de C qui sont dans k.

4. Pour obtenir un courbe de Weil contenue dans une classe donnée, je calcule les nombres $c_1, c_2, \ldots, c_n$ correspondant à l'une des courbes de cette classe; je sais construire une courbe W_n qui corresponde à ces nombres $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Pour cela, j'envisage l'extension normale de k définie par les coordonnées du point de C dont l'argument elliptique est $(1/n)(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$; je montre que le groupe de Galois, par rapport à k, de cette extension est mériédriquement isomorphe au produit direct de deux groupes cycliques. Ce qui me permet de déterminer, dans cette extension, deux nombres (*résolvantes de Lagrange*), dont les $n^{\text{ièmes}}$ puissances sont les coefficients a et a' de la courbe W_n cherchée.

Ainsi il existe une courbe de Weil dans toute classe par rapport à k. J'appelle produit de deux classes A_1 et A_2, la classe qui contient le produit d'une courbe de Weil de A_1 par une courbe de Weil de A_2; cette classe ne dépend pas du choix des courbes de Weil dans A_1 et A_2. Les classes forment, au sens de ce produit, un groupe isomorphe holoédriquement au groupe-quotient du groupe des courbes de Weil par le groupe g; ce qui permet d'énumérer ces classes dès que l'on a construit le groupe g.

ALGÈBRE. — *Un critère de primarité.*
Note de M. **Marc Krasner**, présentée par M. Élie Cartan.

Soit $q = p^n$ une puissance d'exposant entier positif n d'un nombre premier rationnel p. k étant un corps des nombres $\mathfrak{p}$-adiques, où $\mathfrak{p}|p$, contenant les racines $q^{\text{ièmes}}$ primitives de l'unité, un $\alpha \neq 0 \in k$ est dit *q-primaire dans k* si $k(\alpha^{1/q})/k$ est une extension non ramifiée. L'ensemble P des nombres q-primaires (dans k) de k est un surgroupe (multiplicatif) d'indice q du groupe H des puissances $q^{\text{ièmes}}$ des nombres non nuls de k, et P/H est engendré par la période (mod H) d'un nombre congru à 1 (mod $\mathfrak{p}$) de k dont la racine $q^{\text{ième}}$ définit l'extension non ramifiée de degré q de k.

Soit p^s la contribution de p dans le degré absolu (on dira qu'une propriété d'un corps $\mathfrak{p}$-adique est *absolue* si elle est prise par rapport au corps p-adique rationnel) f de l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de k. k contient le corps abélien absolu $k^\star = k_{n,s}$ composé du corps (local) k_n des racines p^n-ièmes de l'unité et du corps local non ramifié $k^{(s)}$ de degré p^s. Le groupe de Galois (absolu) g de $k^\star$ est le produit direct des groupes de Galois g' et g'' de k_n et de $k^{(s)}$. η étant une racine $q^{\text{ième}}$ primitive de l'unité, g' est, suivant que $p \neq 2$ ou $p = 2$, la période d'un automorphisme σ de k_n tel que $\sigma\eta = \eta^r$, r étant une racine primitive (mod q), ou le produit direct des périodes de deux automorphismes σ_1, σ_2 de k_n tels que $\sigma_1\eta = \eta^5$, $\sigma_2\eta = \eta^{-1}$; et g'' est la période d'un automorphisme z de $k^{(s)}$. Soient $\mathrm{P}^\star$ et $\mathrm{H}^\star$ les groupes des nombres q-primaires (dans $k^\star$) de $k^\star$ et des puissances $q^{\text{ièmes}}$ des nombres non nuls de $k^\star$. Soit $\mathrm{R}^\star$ le groupe de tous les nombres de $k^\star$ congrus à 1 (mod $\mathfrak{p}p^{1:(p-1)}$).

Théorème. — A. On a $\mathrm{P} = \mathrm{P}^\star\mathrm{H}$; B. le groupe $\mathrm{P}^\star$ *est le groupe de tous les nombres* $\alpha \neq 0$ *de* $k^\star$ *qui satisfont aux conditions suivantes :* 1° *Si* $p \neq 2$, $\sigma\alpha \equiv \alpha^r$ (mod $\mathrm{H}^\star$); *si* $p = 2$, $\sigma_1\alpha \equiv \alpha^5$ *et* $\sigma_2\alpha \equiv \alpha^{-1}$ (mod $\mathrm{H}^\star$); 2° $z\alpha \equiv \alpha$ (mod $\mathrm{H}^\star$); 3° $\alpha \equiv 1$ (mod $\mathrm{R}^\star\mathrm{H}^\star$).

Démonstration. — A. Soit $\varepsilon \equiv 1$ (mod $\mathfrak{p}$) un nombre de $k^\star = k_{n,s}$ tel que $\varepsilon^\star = \varepsilon^{1/q}$ définit $k_{n,s+n}/k_{n,s}$. Alors $\mathrm{P}^\star/\mathrm{H}^\star$ est la période de $\varepsilon\mathrm{H}^\star$. On a $\big(k(\varepsilon^\star):k\big) \leqq \big(k^\star(\varepsilon^\star):k^\star\big) = q$. D'autre part comme $k(\varepsilon^\star) \supseteq k_{n,s+n}$, le degré absolu de l'idéal premier de $k(\varepsilon^\star)$ dans ce corps est $\equiv 0$ (mod p^{s+n}), donc le degré de cet idéal dans $k(\varepsilon^\star)/k$ est $\geqq p^n = q$. Donc $k(\varepsilon^\star)/k$ est une extension non-ramifiée de degré q, et P est la période de $\varepsilon\mathrm{H} = \varepsilon\mathrm{H}^\star\mathrm{H}$, donc est égal à $\mathrm{P}^\star\mathrm{H}$.

B. I. *Si* $\alpha \neq 0 \in k^\star$ *et si* $\alpha^\star = \alpha^{1/q}$, $k^\star(\alpha^\star)$ *est abélien absolu si, et seulement*

si α satisfait aux conditions 1° et 2° de B; en effet, pour que $k^\star(\alpha^\star)$ soit abélien absolu il faut et il suffit que : 1° il soit galoisien absolu; 2° l'élément τ du groupe de $k^\star(\alpha^\star)/k^\star$ tel que $\tau\alpha^\star = \eta.\alpha^\star$ soit permutable avec tous les éléments de g; pour cela il suffit qu'il le soit avec σ (si $p=2$, avec σ_1 et σ_2) et avec z. $\zeta^\star$ étant un isomorphisme de $k^\star(\alpha^\star)$ avec un corps conjugué absolu, et ζ étant son correspondant dans $k^\star$, $k^\star(\alpha^\star)$ est galoisien si, et seulement si, pour tout $\zeta^\star$, on a $k^\star(\zeta^\star\alpha^\star) = k^\star(\alpha^\star)$. Comme $(\zeta^\star\alpha^\star)^q = \zeta^\star\alpha^{\star q} = \zeta^\star\alpha = \zeta\alpha$, ceci a lieu si, et seulement s'il existe un entier rationnel $t(\zeta)$ et un $\beta(\zeta^\star) \in k^\star$ tels que $\zeta^\star\alpha^\star = \alpha^{\star t(\zeta)}.\beta(\zeta^\star)$, c'est-à-dire que $\zeta\alpha = \alpha^{t(\zeta)}.\beta(\zeta^\star)^q \equiv \alpha^{t(\zeta)} \pmod{H^\star}$. Donc $k^\star(\alpha^\star)$ est galoisien absolu s'il existe des entiers rationnels θ (si $p=2$, θ_1 et θ_2) et t tels que $\sigma\alpha \equiv \alpha^\theta$ (si $p=2$, $\sigma_1\alpha \equiv \alpha^{\theta_1}$, $\sigma_2\alpha \equiv \alpha^{\theta_2}$) et $z\alpha \equiv \alpha^t \pmod{H^\star}$. Pour que τ soit permutable avec $\zeta^\star$, il faut et il suffit que $\zeta^\star\tau\alpha^\star = \tau\zeta^\star\alpha^\star$. Or

$$\zeta^\star\tau\alpha^\star = \zeta^\star(\eta.\alpha^\star) = \zeta^\star\eta.\zeta^\star\alpha^\star = \zeta\eta.\zeta^\star\alpha^\star$$

et

$$\tau\zeta^\star\alpha^\star = \tau[\alpha^{\star t(\zeta)}.\beta(\zeta^\star)] = (\tau\alpha^\star)^{t(\zeta)}.\tau\beta(\zeta^\star) = (\eta.\alpha^\star)^{t(\zeta)}.\beta(\zeta^\star) = \eta^{t(\zeta)}.[\alpha^{\star t(\zeta)}.\beta(\zeta^\star)] = \eta^{t(\zeta)}.\zeta^\star\alpha^\star.$$

Donc, $\zeta^\star\tau = \tau\zeta^\star$ si, et seulement si $\zeta\eta = \eta^{t(\zeta)}$, et, puisque $\sigma\eta = \eta^r$ (si $p=2$, $\sigma_1\eta = \eta^5$, $\sigma_2\eta = \eta^{-1}$) et $z\eta = \eta$. $k^\star(\alpha^\star)$ est abélien absolu si, et seulement si $\theta \equiv r$ (si $p=2$, $\theta_1 \equiv 5$, $\theta_2 \equiv -1$) et $t \equiv 1 \pmod q$, c'est-à-dire α satisfait aux conditions 1° et 2° de B.

II. Tous les corps locaux abéliens absolus étant circulaires, tous les corps abéliens absolus qui sont des extensions cycliques de degré p^m, $m \leq n$, de $k^\star$ sont des sous-corps de $k_{2n,s+n} = (k_{2n,s}, k_{n,s+n})$. Donc ils sont tous de la forme $k^\star(\alpha^{1/q})$, où α est de la forme $\alpha \equiv \eta^c\varepsilon^d \pmod{H^\star}$ $(c, d = 0, 1, \ldots, \ldots, q-1)$ [car $k_{2n,s} = k^\star(\eta^{1/q})$, $k_{n,s+n} = k^\star(\varepsilon^{1/q})$]. Donc *le groupe* $C^\star$ *des* $\alpha \neq 0 \in k^\star$ *satisfaisant aux conditions* 1°, 2° *de* B *est la réunion des* $\eta^c\varepsilon^d H^\star(c, d = 0, 1, \ldots, q-1)$. $P^\star$ est la réunion de tous les $\varepsilon^d H^\star(d = 0, 1, \ldots, q-1)$.

III. On sait que ε, qui est p-primaire, est $\equiv 1 \pmod{p^{p:(p-1)}}$, donc est $\in R^\star$. D'autre part, si $c \not\equiv 0 \pmod q$, $\eta^c \not\equiv 1\ [\bmod\ \mathfrak{p}(\eta^{q/p}-1) = \mathfrak{p}p^{1:(p-1)}]$, donc $\eta^c \not\equiv 1 \pmod{R^\star}$. Donc, si $\beta \in H^\star$, $\eta^c\varepsilon^d\beta \equiv \eta^c \pmod{R^\star H^\star}$, et est $\equiv 1 \pmod{R^\star H^\star}$ si et seulement si $c \equiv 0 \pmod q$ [car le groupe d'éléments de $H^\star$ congrus à $1 \pmod{\mathfrak{p}}$ est contenu dans $R^\star$], c'est-à-dire $\eta^c\varepsilon^d\beta \in P^\star$. Donc $P^\star$ *est le groupe des éléments de* $C^\star$ *satisfaisant à la condition* 3° *de* B. C. Q. F. D.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur des fonctions aléatoires définies par leurs équations aux dérivées partielles*. Note de M. **Robert Fortet**, présentée par M. Émile Borel.

t désignant une variable indépendante, par exemple le temps, et $X(t)$ une fonction aléatoire du type de Markoff, c'est-à-dire telle qu'il existe une probabilité bien déterminée $F(t, x; \tau, \xi)$ ne dépendant que de $t, x, \tau(>t), \xi$ pour que, si $X(t)=x$, on ait à l'instant postérieur τ : $X(\tau)\leqq\xi$, MM. Kolmogoroff (1) et Feller (2) ont montré que, sous certaines conditions, $F(t, x; \tau, \xi)$ est, comme fonction de t, x, une solution de l'équation parabolique

$$L(u)=\frac{\partial u}{\partial t}+a(t, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(t, x)\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{1}$$

Et M. Feller a montré (2) que réciproquement, sous certaines conditions de régularité pour a et b, l'équation (1) détermine une fonction aléatoire $X(t)$ du type de Markoff. Nous nous sommes proposé, nous donnant a et b, d'étudier les propriétés de la variable aléatoire ainsi obtenue.

Hypothèses. — Nous supposons que, dans un intervalle $T_1\leqq t\leqq T_2$ dans lequel nous nous plaçons, a et b satisfont à :

α. $a(t, x)=1$;

β. b et $\partial b/\partial x$ existent et sont bornés;

γ. $\partial b/\partial x$ satisfait à une condition de Lipschitz de la forme

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}b[t+\Delta t, x+\Delta x]-\frac{\partial}{\partial x}b(t, x)\right|\leqq A\{|\Delta t|^{\Psi}+|\Delta x|^{\Psi}\} \qquad (0<\Psi\leqq 1).$$

Le cas envisagé est donc une généralisation du processus de N. Wiener étudié par M. P. Lévy (3), et il importe de remarquer que le cas général où $a\neq 1$ se ramène à celui envisagé sous des conditions assez larges par le changement de variables

$$Y(t)=\int_0^{X(t)}\frac{dx}{\sqrt{a(t, x)}}.$$

Résultats. — On sait alors que si $U(t, x; \tau, \xi)$ désigne la solution fonda-

---

(1) *Math. Ann.*, 104, 1931, p. 415.

(2) *Math. Ann.*, 113, 1936, p. 119.

(3) P. Lévy, *Compositio Mathematica*, 7, 1939, p. 283.

mentale de (1), on a $F(t, x; \tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} U(t, x; \tau, y)\,dy$. On montre aisément que U, qui est nécessairement $\geqq 0$, est toujours > 0, et que $X(t)$ est stochastiquement continue; on a alors le théorème :

Théorème I. — *Sous les hypothèses mentionnées plus haut, $X(t)$ est presque sûrement continue, et quels que soient t' et t'', on a presque sûrement :*

$$|X(t'') - X(t')| \leqq c\sqrt{2\,|t'' - t'|\log\frac{1}{|t'' - t'|}}$$

quel que soit le nombre fixe $c > 1$, dès que $|t'' - t'|$ est $<$ qu'un certain nombre positif (aléatoire) indépendant de t' et t''.

Envisageant le problème de l'*absorption*, nous avons considéré le cas fondamental suivant; soit C une courbe du plan (t, x), définie par $x = x(t)$ et telle que $x'(t)$ existe, que $x(t)$ et $x'(t)$ soient bornés; x étant $< x(t)$, la probabilité $\Phi(t, x; \tau)$ que l'on ait au moins une fois $X(t') = x(t')$ dans l'intervalle $(t \leqq t' \leqq \tau)$ existe (en vertu du théorème I); nous avons démontré que :

Théorème II. — *La probabilité $\Phi(t, x; \tau)$, avec $x < x(t)$, est sous nos hypothèses une fonction continue de τ (¹) pourvue d'une dérivée bornée $\varphi(t, x; \tau)$; dans leur domaine d'existence $t < \tau$ et $x < x(t)$, Φ et φ sont, comme fonctions de (t, x), solutions de l'équation (1) avec les conditions aux limites.*

$$\lim_{x \to x(t),\ t < \tau} \Phi(t, x; \tau) = 1, \qquad \lim_{x \to x(t),\ t < \tau} \varphi(t, x; \tau) = 0 \text{ presque partout;}$$

$$\lim_{t \to \tau,\ x \to \xi < x(\tau)} \Phi(\tau, x; \tau) = 0, \qquad \lim_{t \to \tau,\ x \to \xi < x(\tau)} \varphi(t, x; \tau) = 0.$$

$\varphi(t, x; \tau)$ est déterminé par l'équation intégrale

$$\varphi(t, x; \tau) = -2\int_t^{\tau} \frac{\partial h(t', \tau)}{\partial \tau}\varphi(t, x; t')\,dt' + 2\frac{\partial H(t, x; \tau)}{\partial \tau}$$

avec

$$H(t, x; \tau) = \int_{x(\tau)}^{+\infty} U(t, x; \tau, \xi)\,d\xi, \qquad h(t', \tau) = \int_{x(\tau)}^{+\infty} U[t', x(t'); \tau, \xi]\,d\xi.$$

L'hypothèse de l'existence de $x'(t)$ n'est pas essentielle et l'on peut s'en affranchir. D'autre part, on peut évidemment traiter de façon analogue de nombreux problèmes d'absorption plus généraux.

(¹) $\Phi(t, x; \tau)$ est continue en τ à la seule condition que $x(t)$ soit continue.

GÉOMÉTRIE. — *Sur une nouvelle sphère du tétraèdre.*
Note [1] de M. V. Thébault, présentée par M. Élie Cartan.

1. Les perpendiculaires aux côtés BC, CA, AB d'un triangle menées respectivement par les sommets C, A, B (ou B, A, C), forment un triangle $A_1B_1C_1$ (ou $A_2B_2C_2$) qui se déduit de ABC par une similitude ayant pour point double l'un des points de Brocard et pour module $\cot\theta$, θ étant l'angle de Brocard.

Le centre O du cercle (O) circonscrit au triangle ABC, dont les distances à B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont proportionnelles à BC, CA, AB, coïncide donc avec le point de Lemoine du triangle $A_1B_1C_1$ (ou $A_2B_2C_2$) et le cercle (O) est le *second cercle de Lemoine* de ces derniers triangles.

2. Les six arêtes d'un tétraèdre quelconque $T \equiv ABCD$ forment les quadrangles gauches

$$Q \equiv ADCB, \qquad Q' \equiv ACBD, \qquad Q'' \equiv ABCD.$$

Quatre plans non concourants et respectivement perpendiculaires aux côtés de Q, Q′, Q″ déterminent trois tétraèdres dont les aires des faces sont proportionnelles aux côtés des quadrangles correspondants. Ainsi, les plans perpendiculaires sur les côtés AD, DC, CB, BA de Q en A, D, C, B, respectivement, forment un tétraèdre $T_1 \equiv A_1D_1C_1B_1$ dont les aires des faces sont proportionnelles à AB, BC, CD, DA, et l'on obtient des tétraèdres analogues $T_2 \equiv A_2C_2B_2D_2$, $T_3 \equiv A_3B_3C_3D_3$ associés aux quadrangles Q′, Q″.

Les arêtes (A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1), (A_2C_2, C_2B_2, B_2D_2, D_2A_2), (A_3B_3, B_3C_3, C_3D_3, D_3A_3) des quadrangles gauches $Q_1 \equiv A_1D_1C_1B_1$, $Q_2 \equiv A_2C_2B_2D_2$, $Q_3 \equiv A_3B_3C_3D_3$, sont respectivement perpendiculaires aux faces [(B), (C), (D), (A)], [(A), (C), (B), (D)], [(A), (B), (C), (D)] de T.

Comme les distances du centre O de la sphère (O) circonscrite au tétraèdre T aux quatre plans des faces des tétraèdres T_1, T_2, T_3 sont égales à [1/2(AB), 1/2(BC), 1/2(CD), 1/2(DA)], ..., *le centre* O *coïncide avec le point du minimum de la somme des carrés des distances aux quatre plans des faces de chacun des tétraèdres* T_1, T_2, T_3. (Premier point de Lemoine) [2].

---

[1] Séance du 24 février 1941.

[2] Cf. P. Delens, *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 1215.

3. Théorème. — *Les six arêtes d'un tétraèdre quelconque* $T \equiv ABCD$ *forment les quadrangles gauches* $Q \equiv ADCB$, $Q' \equiv ACBD$, $Q'' \equiv ABCD$.

A chacun d'eux correspond un tétraèdre $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, *inscrit à* T, *dont les plans des faces sont perpendiculaires aux quatre côtés. Les sommets des tétraèdres* $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ *sont douze points situés sur une même sphère dont le centre* K *est le point du minimum de la somme des carrés des distances aux plans des faces du tétraèdre* T (seconde sphère de Lemoine).

En effet, les tétraèdres $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, homothétiques à T_1, T_2, T_3, mettent en évidence les quadrangles gauches

$$Q'_1 \equiv A'_1 D'_1 C'_1 B'_1, \qquad Q'_2 \equiv A'_2 C'_2 B'_2 D'_2, \qquad Q'_3 \equiv A'_3 B'_3 C'_3 D'_3,$$

inscrits à T et homothétiques à Q_1, Q_2, Q_3.

Des remarques antérieures il résulte déjà que les quadrangles Q'_1, Q'_2, Q'_3 ont leurs côtés égaux et que les sphères circonscrites aux tétraèdres $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ ont pour centre commun le point K. De plus ([3]), on peut amener par translation $\overline{A_2C_2}$ à coïncider avec $\overline{A_1D_1}$; le quadrangle $A_2C_2B_2D_2$ devient $A_1D_1B'_2D'_2$ et $\overline{A_1D'_2}$, $\overline{D_1D'_2}$, $\overline{D'_2B'_2}$, $\overline{B'_2D_1}$ sont respectivement égaux et parallèles à $\overline{C_1D_1}$, $\overline{C_1A_1}$, $\overline{B_1A_1}$, $\overline{B_1C_1}$. Les triangles $D'_2B'_2D_1$ et $B_1C_1A_1$ ont leurs côtés égaux et parallèles, la droite $\omega'\omega$ joignant les centres des cercles $D_1D'_2B'_2$ et $B_1C_1A_1$ est parallèle à la droite $\omega'_1\omega_1$ joignant les centres des cercles $A_1D_1D''_2$ et $A_1C_1D_1$, centres qui sont symétriques par rapport au milieu de A_1D_1. On a $\omega'\omega'_1 = \omega\omega_1$, et les sphères $A_1B_1C_1D_1$ et $A_1D_1D'_2B'_2$ ont même rayon.

N. B. — 1° Les périmètres des quadrangles Q, Q', Q'' pouvant être parcourus dans deux sens opposés, la sphère (K) contient en réalité 24 points remarquables, symétriques deux par deux par rapport au point K.

2° Les tétraèdres T_1, T_2, T_3 possèdent d'autres propriétés intéressantes que nous donnerons ailleurs.

GÉOMÉTRIE. — *Les espaces à connexion semi-symétrique et la mécanique.* Note de M. **André Lichnerowicz**, présentée par M. Élie Cartan.

Introduction. — On sait le rôle fondamental joué, en mécanique classique et relativiste, par la notion de géodésique d'un espace de Riemann, les principes d'extremum de ces deux mécaniques pouvant être mis sous la forme suivante : le

([3]) Cette partie de la démonstration nous a été communiquée par M. R. Bouvaist, qui a aussi vérifié l'existence de la sphère (K) par le calcul.

point représentatif doit décrire une géodésique d'un espace de Riemann conforme à l'espace fondamental de représentation. Ainsi le principe de Maupertuis en mécanique classique, le théorème d'Eisenhart en mécanique relativiste correspondent à des énoncés de ce genre. Mais de tels énoncés ne sont possibles que dans le cas *où une certaine forme différentielle linéaire est intégrable*; par exemple, dans le cas du principe de Maupertuis, le champ de forces doit dériver d'un potentiel; dans le cas du théorème d'Eisenhart, le gradient des pressions rapporté à l'unité de matière, doit être un véritable gradient de scalaire (fluide parfait).

En généralisant la notion d'espace conforme à un espace de Riemann, nous allons associer à l'ensemble d'une forme quadratique et d'une forme linéaire *non intégrable*, une géométrie *unique*, assurant une représentation très générale des phénomènes de la mécanique.

I. *Espace de Weyl à connexion semi-symétrique*. Soient

$$ds^2 = g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu \qquad \omega = J_\lambda\, dx^\lambda$$

une forme quadratique et une forme linéaire non intégrable. Nous désignerons par $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ les composantes de la connexion attachée à l'espace de Riemann (R) défini par le ds^2. Au voisinage de tout point M de l'espace (R), menons par M un faisceau de courbes et douons ce voisinage de la métrique $\overline{ds^2}$, conforme à la métrique ds^2, et définie en un point m de ce voisinage, par la relation

$$\overline{ds^2} = \overline{g_{\lambda\mu}}\, dx^\lambda\, dx^\mu = e^{2\int_{\mathrm{M}}^{m} J_\lambda dx^\lambda}\, ds^2,$$

l'intégrale étant calculée le long de la courbe joignant M à m. Quand m tend vers M, $\overline{g_{\lambda\mu}}$ tend vers $g_{\lambda\mu}$; mais en M, les dérivées partielles $\partial_\nu \overline{g_{\lambda\mu}}$ s'expriment par les relations

$$\partial_\nu \overline{g_{\lambda\mu}} = \partial_\nu\, g_{\lambda\mu} + 2\, J_\nu\, g_{\lambda\mu}.$$

Ainsi à la métrique $\overline{ds^2}$ correspondra, au point M, la connexion

$$\overline{\Gamma}^\mu_{\lambda\nu} = \Gamma^\mu_{\lambda\nu} + \left[J_\lambda\, g^\mu_\nu + J_\nu\, g^\mu_\lambda - J^\mu\, g_{\lambda\nu} \right]$$

c'est-à-dire la connexion de Weyl attachée à la forme quadratique ds^2 et à la forme linéaire 2ω.

Au point m considérons un vecteur u^μ, unitaire dans ds^2, et soit $\overline{u}^\mu$ le vecteur collinéaire, unitaire dans ds^2. Quand m tend vers M, $\overline{u}^\mu$ tend vers u^μ; mais en M les dérivées $\partial_\lambda \overline{u}^\mu$ s'expriment par les relations

$$\partial_\lambda \overline{u}^\mu = \partial_\lambda\, u^\mu - J_\lambda\, u^\mu$$

Considérons alors l'espace (E) formé par le raccordement des voisinages

des différents points M de (R), selon la connexion $\bar{\Gamma}^{\mu}_{\lambda\nu}$, le vecteur unitaire en M étant $\bar{u}^{\mu}$. Si $\bar{\nabla}_{\lambda}$ désigne l'opérateur de dérivation covariante dans (E), il vient

$$\bar{\nabla}_{\lambda}\bar{u}^{\mu} = \partial_{\lambda}\bar{u}^{\mu} + \bar{\Gamma}^{\mu}_{\lambda\nu}\bar{u}^{\nu} = \partial_{\lambda}u^{\mu} - J_{\lambda}u^{\mu} + \bar{\Gamma}^{\mu}_{\lambda\nu}u^{\nu}$$

ou

$$\bar{\nabla}_{\lambda}\bar{u}^{\mu} = \partial_{\lambda}u^{\mu} + \left[\bar{\Gamma}^{\mu}_{\lambda\nu} - J_{\lambda}g^{\mu}_{\nu}\right]u^{\nu}.$$

Cet espace rentre donc dans la classification de Cartan, pourvu qu'on le considère comme admettant la connexion :

$$\Pi^{\mu}_{\lambda\nu} = \bar{\Gamma}^{\mu}_{\lambda\nu} - J_{\lambda}g^{\mu}_{\nu} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} + \left[J_{\nu}g^{\mu}_{\lambda} - J^{\mu}g_{\lambda\nu}\right].$$

Son tenseur de torsion peut s'écrire

$$\Pi^{\mu}_{[\lambda\nu]} = J_{[\nu}g^{\mu}_{\lambda]}$$

et est par suite *semi-symétrique* selon la définition de Schouten.

Nous dirons que l'espace (E) est *l'espace de Weyl à connexion semi-symétrique*, attaché à ds^2 et ω. L'addition à ω d'une différentielle totale peut être, comme pour un véritable espace de Weyl, corrigée par la multiplication de ds^2 par un scalaire.

II. *Les géodésiques de l'espace* (E) *et la mécanique.* — Désignons par ∇_{λ} l'opérateur de dérivation covariante dans (R); les géodésiques de l'espace (E) seront définies par les équations

$$\bar{u}^{\lambda}\bar{\nabla}_{\lambda}\bar{u}^{\mu} = u^{\lambda}\nabla_{\lambda}u^{\mu} - (g^{\lambda\mu} - u^{\lambda}u^{\mu})J_{\lambda} = 0.$$

Elles vont jouer un rôle important, tant en mécanique classique qu'en mécanique relativiste.

a. Mécanique relativiste. — Soit $T_{\lambda\mu}$ le tenseur d'énergie, second membre des équations d'Einstein. Désignons par ρ et u^{λ} un scalaire et un vecteur unitaire ayant la signification d'une densité de matière et d'une vitesse généralisée, et posons

$$T_{\lambda\mu} = \rho u_{\lambda}u_{\mu} - \tau_{\lambda\mu},$$

où $\tau_{\lambda\mu}$ est un tenseur quelconque symétrique. Le tenseur $T_{\lambda\mu}$ satisfaisant aux conditions de conservation, il vient

$$u^{\lambda}\nabla_{\lambda}u^{\mu} - (g^{\lambda\mu} - u^{\lambda}u^{\mu})J_{\lambda} = 0 \qquad [\text{où } \nabla_{\lambda}(\tau^{\lambda}_{\mu}) = \rho J_{\mu}].$$

Ainsi les lignes de courant d'un fluide quelconque (fluide électrisé par exemple), les trajectoires spatio-temporelles d'une masse matérielle électrisée etc., seront données par les géodésiques d'un espace (E) déterminé.

b. Mécanique classique. — Considérons un système mécanique à liaisons holonomes, parfaites, indépendantes du temps et soit $ds^2 = (2T)\,dt^2$ l'espace de Riemann associé. Soient Q_λ les composantes dans cet espace du champ de forces, *supposé non intégrable*. Les équations de Lagrange relatives au système peuvent s'écrire

$$u^\lambda \nabla_\lambda u^\mu - (g^{\lambda\mu} - u^\lambda u^\mu)\frac{Q_\lambda}{2T} = 0 \qquad \left(\text{où } u^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds}\right).$$

Il résulte de ces équations une généralisation immédiate du principe de Maupertuis.

Les résultats indiqués dans cette Note seront développés dans un Mémoire en préparation.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les fonctions à variation bornée et les courbes rectifiables.* Note de M. LAURENT SCHWARTZ, présentée par M. Paul Montel.

I. Soient (U) l'espace vectoriel complet des fonctions continues $\Phi(x)$ à variation bornée dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ et s'annulant pour $x = 0$, la norme étant

$$\|\Phi\| = \int_0^1 |d\Phi|;$$

(v) le sous-espace vectoriel des fonctions $F(x)$ absolument continues,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad \|F\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt;$$

(w) le sous-espace vectoriel des fonctions singulières $G(x)$, dont toute la variation est concentrée sur un ensemble de mesure nulle.

(U) est somme directe des deux espaces (v) et (w), toute fonction Φ a une décomposition unique $\Phi = F + G$, $\|\Phi\| = \|F\| + \|G\|$; les deux sous-espaces (v) et (w) sont complets, donc fermés dans (U). La fonction $\Phi_0 = F_0 + G_0$ est isolée de toutes les fonctions absolument continues, si $G \neq 0$, sa distance à (w) est $\|G_0\|$, et c'est la fonction F_0 qui parmi toutes les F en est la plus proche.

II. $\Phi(x) = F(x) + G(x)$ étant une fonction continue quelconque à variation bornée dans l'intervalle (0, 1), soit (Δ) une décomposition de cet intervalle en intervalles partiels $(0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_i, x_{i-1}), \ldots,$

$(x_{n-1}, 1)$. La fonction $\mathcal{L}_\Delta(x)$ égale à Φ en tous les points de division et interpolant linéairement Φ dans les intervalles (x_i, x_{i+1}) est telle que $\int_0^1 |d\Phi|$ soit la limite des quantités $\int_0^1 |d\mathcal{L}_\Delta|$ lorsqu'on considère une suite de décompositions (Δ) pour lesquelles $\operatorname{Max}_i |x_{i+1} - x_i|$ tende vers zéro. On peut se demander si $\lim_\Delta \int_0^1 |d(\Phi - \mathcal{L}_\Delta)| = 0$, c'est-à-dire si $\lim_\Delta \|\Phi - \mathcal{L}_\Delta\| = 0$. Il résulte de (I) qu'il ne peut pas en être ainsi si $G \neq 0$, puisque $\|\Phi - \mathcal{L}_\Delta\| \geqq \|G\|$. Au contraire, la propriété est exacte si Φ est une fonction absolument continue F.

Posons en effet $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; $\mathcal{L}_\Delta(x) = \int_0^x \mu_\Delta(t)\,dt$, $\mu_\Delta(t)$ est la fonction constante dans chaque intervalle (x_i, x_{i+1}) et égale à la moyenne de f dans cet intervalle. Il faut montrer que $\int_0^1 |f - \mu_\Delta|\,dt$ tend vers zéro si $\operatorname{Max}_i |x_{i+1} - x_i|$ tend vers zéro. Or on sait que l'on peut trouver une fonction $\Psi_\Delta(x)$ constante dans chaque intervalle (x_i, x_{i+1}) et telle que pour η assez faible, $\operatorname{Max}_i |x_{i+1} - x_i| < \eta$ entraîne

$$\int_0^1 |f(t) - \Psi_\Delta(t)|\,dt < \varepsilon.$$

Sur tout ensemble E réunion d'intervalles (x_i, x_{i+1}) on a exactement

$$\int_E f\,dt = \int_E \mu_\Delta\,dt$$

d'où

$$\left|\int_E (\Psi_\Delta - \mu_\Delta)\,dt\right| = \left|\int_E (\Psi_\Delta - f)\,dt\right| \leqq \int_0^1 |\Psi_\Delta - f|\,dt < \varepsilon.$$

En appliquant successivement cette inégalité à E_1, réunion des intervalles (x_i, x_{i+1}) dans lesquels $\Psi_\Delta - \mu_\Delta \geqq 0$ et à E_2, réunion des (x_i, x_{i+1}) dans lesquels $\Psi_\Delta - \mu_\Delta < 0$, et en additionnant membre à membre, on trouve

$$\int_0^1 |\Psi_\Delta - \mu_\Delta|\,dt < 2\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 |f - \mu_\Delta|\,dt < 3\varepsilon.$$

III. Soient (C) la courbe plane $y = \Phi(x)$, $(\mathcal{P}_\Delta)$ la ligne brisée polygonale $y = \mathcal{L}_\Delta(x)$, inscrite dans (C). On peut interpréter la différence $\Phi - \mathcal{L}_\Delta$ comme la distance, mesurée suivant une parallèle à $y'y$, de chaque point M de (C) à celui des côtés de $(\mathcal{P}_\Delta)$ qui sous-tend l'arc de (C) contenant M.

La variation totale de cette distance dépend de la nature de Φ. Au contraire nous allons montrer que, quelle que soit la courbe (C) rectifiable (plane ou non), la dis-

tance normale $\delta_\Delta(M)$ de chaque point M à celui des côtés de $(\mathcal{P}_\Delta)$ qui sous-tend l'arc de (C) contenant M est à variation bornée et que $\int_C |d\delta_\Delta(M)|$ tend vers zéro pour une suite de décompositions (Δ) pour lesquelles $\operatorname{Max}_i |M_i M_{i+1}|$ tende vers zéro.

Appelons en effet, en chaque point M, $\theta_\Delta(M)$ l'angle, défini presque partout, de la tangente en M avec la corde $M_i M_{i+1}$ sous-tendant l'arc qui contient M. On vérifie aisément que

$$\int_C |d\delta_\Delta(M)| \leqq \int |\sin\theta_\Delta|\, ds$$

(On aurait l'égalité si la courbe était plane; lorsqu'elle ne l'est pas, $\int_{M_i}^{M_{i+1}} |\sin\theta_\Delta|\, ds$ est la longueur de la projection de l'arc $M_i M_{i+1}$ sur le plan normal à la corde $M_i M_{i+1}$, quantité supérieure ou égale à $\int_{M_i}^{M_{i+1}} |d\delta_\Delta M|$). Mais (C) a presque partout une tangente, de sorte que $\theta_\Delta(M)$ tend vers zéro presque partout lorsque $\operatorname{Max}_i |M_i M_{i+1}|$ tend vers zéro, donc $\int |\sin\theta_\Delta|\, ds$ tend aussi vers zéro.

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Les infrasons stellaires.* Note (1) de M. **Émile Sevin**, présentée par M. Ernest Esclangon.

Le corps des étoiles, étant de nature gazeuse, est susceptible de propager élastiquement des ondes avec la vitesse donnée par la formule classique

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{1}{K\rho_i}},$$

où ρ_i est la densité, à la distance r_i du centre, et K le coefficient de compressibilité.

Soient Δv_i, ΔP_i et $\Delta\rho_i$ les variations que le volume spécifique v_i, la pression totale P_i et la densité ρ_i subissent du fait du passage d'une onde. On sait que

$$\frac{\Delta v_i}{v_i} + \frac{\Delta\rho_i}{\rho_i} = 0$$

et que le coefficient de compressibilité est défini par l'égalité

$$K = -\frac{\Delta v_i}{v_i\,\Delta P_i} = \frac{\Delta\rho_i}{\rho_i\,\Delta P_i}.$$

---

(1) Séance du 24 février 1941.

A un moment donné, la pression totale et la densité valent donc effectivement

$$P = P_i + \Delta P_i, \qquad \rho = \rho_i + \Delta\rho_i,$$

et ces grandeurs doivent satisfaire à l'équation générale de l'équilibre dynamique des étoiles (²)

$$\frac{dP}{P} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{1}{g}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right)\frac{d\rho}{\rho}.$$

Les accélérations périodiques, qui peuvent entrer en jeu, étant très petites par rapport à l'accélération de la pesanteur g, le terme variable de la parenthèse n'est que de l'ordre de $\frac{1}{100}$, ou même beaucoup moins, et il est permis d'écrire

$$P_i + \Delta P_i = \varkappa(\rho_i + \Delta\rho_i)^{\frac{4}{3}},$$

d'où, puisque la condition d'équilibre statique est $P_i = \varkappa\rho_i^{\frac{4}{3}}$,

$$\frac{\Delta P_i}{P_i} = \frac{4}{3}\frac{\Delta\rho_i}{\rho_i}.$$

Dès lors il vient immédiatement

$$K = \frac{3}{4}\frac{1}{P_i}, \qquad w = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{P_i}{\rho_i}},$$

et l'on rapprochera cette formule de celle que Laplace a donnée pour la vitesse de propagation du son dans l'air

$$w = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{7}{5}\frac{p}{\rho}};$$

on passe de l'une à l'autre en remplaçant le rapport des chaleurs spécifiques, $\gamma = 7/5$, par $4/3$ et en substituant la pression totale P_i à la pression de la matière p.

En vue d'estimer le temps dt, qui est nécessaire pour que la propagation s'effectue sur une longueur dr du rayon, supprimons les indices i, afin d'alléger les notations, et utilisons la formule $\beta\mu P = R\rho T$, qui résume les lois de Mariotte et de Gay-Lussac ; nous obtenons

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{4}{3}\frac{P}{\rho}}} = \frac{dr}{\sqrt{\frac{4}{3}\frac{RT}{\beta\mu}}}.$$

(²) *Comptes rendus*, **211**, 1940, p. 540.

Puis, en recourant aux notations d'Emden, nous pouvons poser

$$dr = \frac{d\xi}{\omega u_0}, \qquad \sqrt{\frac{4}{3}\frac{RT}{\beta\mu}} = \left(\frac{4}{3}u_0\pi G\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{M}{4\pi M_1}\right)^{\frac{1}{3}}\psi^{\frac{1}{2}},$$

d'où, en remplaçant u_0 et ω par leurs valeurs,

$$dt = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{R}^3}{GM}}\left(\frac{3M_1}{4\pi^2\mathcal{R}_1^3}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d\xi}{\psi^{\frac{1}{2}}}.$$

Dans cette équation différentielle, $2\pi\sqrt{\mathcal{R}^3/GM}$ représente une période, qui est caractérisée par le rayon $\mathcal{R}$ et par la masse M de l'étoile, ainsi que par la constante de gravitation G.

Soit maintenant θ la durée de la propagation d'une extrémité à l'autre d'un diamètre

$$\theta = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{R}^3}{GM}}\left(\frac{3M_1}{4\pi^2\mathcal{R}_1^3}\right)^{\frac{1}{2}}2\int_0^{6,9011}\frac{d\xi}{\psi^{\frac{1}{2}}}.$$

Or il est remarquable, le calcul numérique de l'intégrale définie le prouve, que le produit

$$\left(\frac{3M_1}{4\pi^2\mathcal{R}_1^3}\right)^{\frac{1}{2}}2\int_0^{6,9011}\frac{d\xi}{\psi^{\frac{1}{2}}}$$

soit égal à l'unité, de sorte que

$$\theta = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{R}^3}{GM}}. \tag{1}$$

Ce résultat montre que l'étoile se comporte, au point de vue envisagé, exactement comme un tuyau sonore, de longueur $2\mathcal{R}$, ouvert à ses deux extrémités. Un système d'ondes stationnaires s'y établit : un ventre se rencontre en surface, alors que le centre est un point nodal; la période de l'infrason fondamental, qui est rendu, est donnée par la formule (1). Bien entendu, comme dans les tuyaux ouverts, cette vibration est accompagnée de tous ses harmoniques, ventres et nœuds secondaires, se présentant à des distances du centre qu'il est aisé de calculer.

Ces vibrations, c'est par les pulsations des Céphéides que nous en avons connaissance; l'accord entre les périodes observées de ces étoiles et celles qui résultent de la formule (1) est numérique ([3]).

([3]) *Comptes rendus*, 211, 1940, p. 638.

Les vibrations fondamentales données par les Céphéides couvrent ainsi environ neuf octaves; celle provenant de δ Cephei est à 27,587 octaves au-dessous du *la* normal.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Sur la théorie du deuton.*

Note [1] de M. **Jacques Solomon**, transmise par M. Paul Langevin.

1. Soient M la masse du proton, μ celle du méson, f la constante qui caractérise l'interaction entre ces deux particules; soit enfin $\hbar/\mu c x_0$ la distance à laquelle on arrête les intégrations. Dans ces conditions, le moment magnétique du neutron *libre* est (en magnétons nucléaires)

$$(1) \qquad n = \frac{8}{3}\frac{f^2}{\hbar c}\frac{M}{\mu}\int_0^{x_0}\frac{x^4\,dx}{(x^2+1)^2}.$$

Si le neutron est placé à la distance $R = \hbar\rho/\mu c$ d'une charge positive, les trajectoires des mésons sont déformées et le nouveau moment magnétique n' est

$$(2) \qquad \frac{n'}{n} = 1 - \frac{e^2}{\hbar c}\frac{1}{\rho}.$$

Il est *inférieur* au moment magnétique à l'état libre.

2. Le moment magnétique du deuton s'obtient par composition des moments magnétiques du proton et du deuton. Il n'y a pas additivité rigoureuse pour les raisons suivantes :

a. Les trajectoires des mésons négatifs émis par le neutron sont perturbées par le proton;

b. Les trajectoires des mésons positifs émis par le proton sont perturbées par le neutron;

c. Les mésons positifs et négatifs se perturbent mutuellement;

d. Les trajectoires des mésons sont modifiées par l'existence du quadrupôle électrique. Il est clair que la perturbation *b* est faible devant *a*. La perturbation *c* est au plus du même ordre de grandeur que *a*.

On peut évaluer la perturbation *a* en remplaçant dans (2) $1/\rho$ par sa valeur moyenne. Celle-ci dépend fortement de la valeur choisie pour x_0 : elle ne peut en tout cas dépasser l'unité. La correction est donc de 1 % tout au plus.

---

(1) Séance du 24 février 1941.

Quant à la perturbation d, la correction correspondante est donnée par (2), où l'on a donné à x une valeur correspondant à l'importance du moment quadripolaire (soit $x = 1,7$). Ici encore on trouve une correction inférieure à 1 %.

Par conséquent, l'additivité des moments magnétiques dans le deuton se vérifie à 2 % près, en accord avec les résultats expérimentaux. Malgré que les dimensions du deuton soient du même ordre de grandeur que la portée des « atmosphères » des mésons qui environnent le proton et le neutron, ces particules conservent donc une forte individualité dans le deuton.

RADIOACTIVITÉ. — *Sur les niveaux d'excitation nucléaires dans les corps du dépôt actif de l'actinon.* Note de M. **Jean Surugue**, transmise par M. Paul Langevin.

Des recherches antérieures ([1]) nous ont déjà fourni, par l'étude du spectre de raies β de conversion interne, des informations sur les rayonnements γ émis au cours des transformations successives de AcB à AcD. Un nouvel examen de nos résultats expérimentaux et leur comparaison avec ceux obtenus par d'autres méthodes ([2]) nous ont conduit aux valeurs que nous indiquons ici, ramenées à un atome désintégré.

1° *Transformation* AcB → AcC. — Le tableau ci-dessous donne le résultat des calculs effectués à partir de l'intensité absolue des raies β (3e colonne).

Rayon γ.	Énergie en ekV.	Électrons émis de la 1re couche (K ou L) $p\alpha_1$.	Probabilité d'excitation p du rayonnement γ. Quadripôle.	Dipôle.	Probabilité d'émission de photon quadripôle $p(1-\alpha)$.	Énergie émise par rayonnement γ en ekV.
A	65,2	0,0032	0,0067	0,008	0,00322	0,21
Ac_1....	83	0,00005	0,00017	0,00019	0,00012	0,01
C	404	0,004	0,065	0,236	0,0604	24,4
D_2.....	425	0,003	0,062	0,202	0,0582	24,8
Dc_1....	487	0,0001	0,0026	0,010	0,0025	1,22
Dg	764	0,00016	0,013	0,067	0,0126	9,6
E	829	0,0016	0,135	0,400	0,133	110
			Total	....	0,27	170,2

([1]) S. P. Choong et J. Surugue, *J. Phys.*, 9, 1938, p. 437.

([2]) K. T. Li, *Proc. Roy. Soc.*, 158, 1936, p. 571; Sargent, *Canadian Journ. of Res.*, 17, 1939, p. 82; Kara-Michailova, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 34, 1938, p. 429.

Les rayonnements γ les plus intenses, d'énergies 404, 425 et 829 ekV se comportent certainement comme des rayonnements quadripolaires, sinon leur intensité serait beaucoup plus grande que ce qu'indiquent les méthodes d'absorption ([3]). Pour les autres rayonnements, le calcul de la probabilité d'excitation de chacun des niveaux trouvés et des constantes partielles de désintégration conduit, par confrontation avec la courbe de Sargent, à penser que seuls les rayonnements de 83 et 487 ekV pourraient être dipolaires.

Le schéma de niveaux adopté pour le noyau AcC diffère de celui que nous avions proposé précédemment par l'emplacement du rayonnement de 65 ekV, trop intense pour la disposition primitive. Le tableau ci-dessous donne les probabilités d'excitation des différents niveaux ainsi que les constantes partielles de désintégration qui y correspondent.

83 et 487 { Quadripolaires I. / Dipolaires II.

65 — 829 — 425 — 764 — 83 — 404 — 487

ekV	Probabilités d'excitation. I.	Probabilités d'excitation. II.	Constantes partielles 10^{-4} sec^{-1}. I.	Constantes partielles 10^{-4} sec^{-1}. II.
829...	0,204	0,204	0,65	0,65
764...	0,006	0,006	0,019	0,019
487...	0,0032	0,0102	0,0103	0,033
404...	0,0028	0,0028	0,009	0,009
0...	0,784	0,777	2,52	2,498
Total...	1	1	3,208	3,209

On trouve pour le rapport des probabilités des deux états extrêmes la valeur 3,8, c'est-à-dire que les rayons β émis par AcB sont formés de deux groupes principaux dont les énergies maxima diffèrent de 829 ekV., et dans le rapport de 1 à 3,8, nombre notablement plus grand que celui proposé par Sargent (*loc. cit.*), mais en meilleur accord avec les courbes de Lecoin ([4]) et avec l'intensité de nos propres clichés dans la région de faible énergie du spectre β.

L'énergie moyenne des rayons γ de AcB → AcC est alors de 630 ekV.

2° *Transformation* AcC → AcC″. — Le rayonnement γB de 350 ekV.

([3]) M. Curie, et P. Savel, *J. Phys.*, 4, 1933, p. 457; S. Benedetti, *J. Phys.*, 10, 1939, p. 294.

([4]) *J. Phys.*, 9, 1938, p. 82.

est aussi quadripolaire et l'intensité du photon correspondant est 0,122 (énergie totale émise = 42,8 ekV). La probabilité du niveau d'excitation est 0,14, c'est-à-dire que le rapport des intensités des deux groupes de rayons α devrait être 0,86/0,14 = 6,1, en bon accord avec les mesures directes ([5]), compte tenu des erreurs expérimentales affectant chacune des méthodes.

3° *Transformation* AcC″ → AcD. — La raie E_4, de notre spectre ([1]) peut correspondre à un rayonnement γ de 870 ekV., qui serait celui qu'a signalé Benedetti ([3]). Il s'agit vraisemblablement encore d'un rayonnement quadripolaire, d'intensité égale à environ 0,005 (soit 1/25 du rayonnement γ dur de AcB).

CHIMIE PHYSIQUE. — *Adsorption des solutions aqueuses concentrées d'acide acétique par le charbon de sang. Adsorption vraie du solvant et du corps dissous; action réciproque de chacun de ces corps sur l'adsorption de l'autre.* Note ([1]) de M. **Mathieu Dobine.**

J'ai calculé par la méthode décrite ([2]) l'adsorption vraie de l'acide acétique et de l'eau d'une part, à partir des isothermes I et II de la Note précédente, et d'autre part à partir des isothermes I et III.

J'ai obtenu les deux couples de courbes ci-après.

Voici ce que montre l'examen de la figure 2 :

1° Les courbes obtenues par la méthode de dessiccation au cours de mes expériences actuelles et de celles de ma Note du 27 décembre 1937 concordent parfaitement. Les conclusions que j'ai formulées alors se trouvent donc confirmées.

2° Les courbes obtenues par la méthode des *dilutions minima* sont de même nature que celles obtenues par la méthode de dessiccation et, à un très petit intervalle près, coïncident avec elles.

3° Que ce soit par l'une ou par l'autre méthode, on constate que l'adsorption de l'acide acétique croît au début lentement avec la concentration, elle devient ensuite très intense et, entre 12-13N et acide acétique glacial, elle fait un saut vers le haut et la courbe devient presque verticale.

([5]) S. Rosenblum, M. Guillot et M. Perey, *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1274; Rutherford et Wynn-Williams, *Proc. Roy. Soc.*, 133, 1931, p. 351.

([1]) Séance du 3 février 1941.

([2]) *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 1388; 206, 1938, p. 430; 212, 1941, p. 155.

4° *L'isotherme de l'adsorption de l'acide acétique* obtenue par la méthode de dessiccation est située légèrement au-dessus de celle obtenue par les *dilutions minima*; donc pour une même concentration d'équilibre la

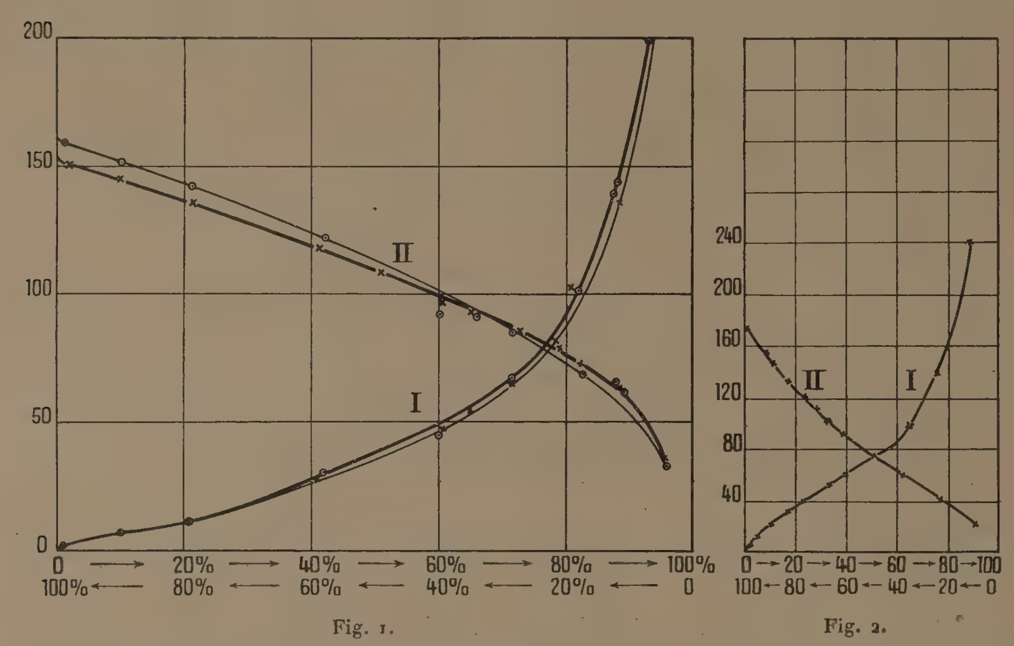


Fig. 1. Fig. 2.

Fig. 1. — Courbe I, adsorption vraie d'acide acétique; courbe II, adsorption vraie d'eau; ⊙, courbes obtenues par la méthode de dessiccation; ×, par la méthode des « dilutions minima ». Absc., concentration d'équilibre de l'acide acétique et de l'eau en pour 100 de leur poids par rapport au poids total; ord. (x/m et y/m), adsorption de l'acide acétique et de l'eau par gramme de charbon en gramme-millimolécules.

Fig. 2. — Courbe I, adsorption de l'acide acétique; courbe II, adsorption de l'eau. Absc., concentration d'équilibre en pour 100 de molarité; ord., adsorption en gramme/millimolécules par gramme de charbon.

première méthode détermine une adsorption plus forte de l'acide acétique que ne le fait la seconde méthode. Ceci tendrait à démontrer que l'eau excerce une action retardatrice sur le pouvoir adsorbant du charbon par rapport à l'acide acétique. Cette supposition est corroborée par les recherches de Herbst (*Biochem. Zeitung*, 1921, p. 103) qui a trouvé que l'humidité diminue l'adsorption de divers gaz sur le charbon de bois, par les recherches de Schurmovskaja et Brunse (*J. Ch. Phys. Russe*, p. 301, 1937) qui ont constaté que l'eau diminue le pouvoir catalytique de l'hopcalite, et par tant d'autres auteurs qui ont conclu dans le même sens. Ceci expliquerait également en partie, d'une part pourquoi l'adsorption de l'acide acétique devient particulièrement intense aux très fortes concentra-

tions (c'est que la quantité d'eau y diminue), et d'autre part pourquoi les deux isothermes en question coïncident aux concentrations faibles (c'est que des petites variations dans la teneur d'eau n'ont plus d'influence, étant donné la grande dilution de ces solutions).

Les deux isothermes de l'adsorption de l'eau obtenues par les deux méthodes étudiées se coupent en un point correspondant à la concentration de 11 N. Entre 0 et 11 N l'isotherme obtenue par la méthode de dessiccation est située au-dessus de celle obtenue par la méthode des *dilutions minima* et, de là jusqu'à acide acétique glacial, elle est située au-dessous. L'acide acétique dilué activerait d'abord l'adsorption de l'eau en facilitant le mouillage du charbon hydrophile. Fortement concentré, l'acide acétique, par la grande masse de ses molécules, déplacerait les molécules d'eau de la surface. D'autre part la solvatation, qui diminue avec la concentration et détermine une élimination moins forte de l'eau, peut expliquer aussi que l'adsorption de celle-ci paraisse moins forte. Ceci expliquerait également l'origine de la petite courbure, concave vers l'abscisse, de l'isotherme III d'adsoption de l'acide acétique.

5° Les isothermes de l'adsorption vraie rendent compte des isothermes de l'adsorption apparente. Voici, à cet effet, quelques exemples se rapportant à l'isotherme de l'adsorption apparente II.

	Solution initiale.		Adsorption vraie.		Adsorption apparente.	
Titre.	Poids ac. acét. par litre (en g.).	Poids eau par litre (en g.).	Poids ac. acét. (en g.). %	Poids eau (en g.). %	Titre final calculé.	Titre final trouvé.
1,848 N....	110,88	904,82	15,33 (13,8)	86 (9,5)	1,766	1,766
7,504 »....	450,24	604,66	59,92 (13,3)	71,14 (11,78)	7,416	7,412
10,833 »....	650	419	93,5 (14,35)	55,2 (13,2)	10,766	10,762
15,666 »....	940	132,8	269,7 (28,7)	36,9 (27,8)	15,623	15,614

Les valeurs de l'adsorption apparente trouvée et calculée sont donc les mêmes.

Sur les courbes construites en molarités (*fig.* 2) on voit que l'isotherme I présente un point net d'inflexion et que celui-ci correspond à la concentration molaire de 50 %, ce qui revient à 78-80 % en poids. Or c'est la concentration à laquelle la densité des solutions aqueuses d'acide acétique est maxima. Il y a donc parallélisme entre l'inflexion de la courbe des densités et celle de l'adsorption et la cause doit être la même. La densité maxima des solutions aqueuses d'acide acétique [à l'instar de la densité

maxima de l'eau à 4°, van Zaar (³)], est due aux variations du degré d'association des molécules d'acide; celle-ci augmente avec la concentration; l'augmentation est plus forte aux concentrations élevées (⁴) et est accompagnée d'une augmentation de volume. Il en est de même de l'adsorption, et l'inflexion de la courbe serait due à la forte augmentation du degré de l'association. C'est encore par cette association des molécules que s'expliquerait, pour une part, la forte augmentation de l'adsorption aux grandes concentrations.

Conclusion. — Cette étude nous permet de connaître, aussi bien par l'une que par l'autre des méthodes exposées, l'adsorption vraie de l'acide et de l'eau sur le charbon, et d'énoncer quelques hypothèses sur l'action réciproque exercée par chacun de ces corps sur l'adsorption de l'autre, sur le rôle de la solvatation et de l'association des molécules. Il conviendrait de multiplier les recherches sur l'adsorption en solution concentrée qui sont certainement très riche en enseignements.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Le complexe globine-hématine.* Note de M. Maurice Piettre, présentée par M. Charles Achard.

On admet classiquement que l'oxyhémoglobine est un chromoprotéide composé de deux substances, facilement séparables; une substance albuminoïde la globine (94 %) et un groupement prosthétique chromophore, l'hématine (6 %) constituant le fragment fonctionnel spécifique dont le noyau pyrrolique fondamental possède une puissance extraordinaire de cristallisation. Schützenberger, le premier, a donné une méthode de séparation de ces deux constituants, basée sur l'action de HCl étendu en présence d'alcool et d'éther. L'hématine passe dans l'éther et la globine est précipitée ensuite de la liqueur aqueuse par NH^3.

Nous avons appliqué cette méthode quelque peu modifiée, non plus au sang total ou aux hématies mais à l'oxyhémoglobine cristallisée de cheval. La séparation des deux substances composantes est assez incomplète; l'hématine qui passe dans le mélange acétone-éther entraîne des impuretés (teneur en Fe de 5,5 à 7,5 %, au lieu de 9,15). Pour obtenir la globine, il faut neutraliser par étapes, à l'aide de NH^3 en solution à 10 ‰, la liqueur aqueuse chlorhydrique; entre pH 5,25 et 6,8 on précipite de

(³) *Zeits. phys. Chem.*, 31, 1899, p. 1-17.
(⁴) Wremsky, *Zeits. phys. Chem.*, A, 133, 1928, p. 362.

volumineux floculats légèrement brunâtres, puis grisâtres contenant encore du fer (30 à 40 % du fer initial). A partir de pH 6,9, les floculats changent complètement de caractères : très fins, blancs, se déposant par repos sur les parois des récipients en une matière grenue, sableuse. Ces derniers dépôts successifs réunis, lavés et séchés à 103-104°, ont donné à l'analyse les résultats suivants, nettement différents de ceux de Schützenberger :

Composition élémentaire moyenne %.

	C.	H.	N.	S.
Globine de l'oxyhémoglobine...	51,6	7,9	17,2	<0,01
» Schützenberger....	54,97	7,2	16,89	0,49

La globine pure, par ses propriétés et sa composition, se classe bien dans le groupe des histones, comme l'avait précisé Kossel. La scission de l'oxyhémoglobine s'accompagne de la mise en liberté de substances grasses déjà signalées avec A. Vila [1], en proportion très faible avec les acides forts, élevée avec les acides faibles, lactique notamment (28 à 30 % d'hématine).

Globine et hématine forment-elles une combinaison ou un simple complexe physicochimique? Les données suivantes apportent à la deuxième conception un sérieux appui.

1° Si, dans le traitement de l'oxyhémoglobine décrit plus haut, on substitue à HCl des acides faibles (lactique, butyrique, isobutyrique etc.), l'éther se colore à peine, toute l'hématine libérée précipite dans la liqueur aqueuse à l'état de gros flocons d'un beau noir ardoise. Il y a donc une *véritable floculation* du pigment au moment de sa séparation (qui est d'ailleurs plus faible qu'avec HCl), pour des concentrations N/1 et N/2 en acides organiques.

2° L'action des bases alcalines (KOH, NaOH) ne provoque *aucune séparation* d'hématine. La coloration rouge rubis initiale de l'oxyhémoglobine vire à peine au rouge un peu plus foncé avec les solutions basiques N/1 à N/50 et reste inchangée au delà de N/50. Si alors on porte, par addition d'acide, ces liqueurs à un pH nettement inférieur à 7, on libère aussitôt l'hématine.

3° La floculation de l'hématine se produit instantanément aux basses températures à 0° C. et au-dessous, comme à la température du labora-

---

(1) M. Piettre et A. Vila, *Comptes rendus*, 141, 1905, p. 1041.

toire, pour les mêmes concentrations en acides (acides forts de N/2 à N/100, acides faibles N/1 et N/2). Il suffit, en effet, après l'action à froid de ces acides, d'agiter le mélange avec de l'éther pour constater la libération de pigment noir. On ne saurait invoquer, dans ces conditions, une action hydrolytique; il est bien plus logique d'admettre un phénomène purement physique, la *pectisation d'un colloïde auparavant dispersé dans un autre colloïde lui servant de support.*

4° Le contrôle de la cristallisation par les rayons X a été fait par M. J.-J. Trillat. Il a porté sur des cristaux de premier jet ou purifiés, fraîchement préparés, mais âgés de 3 à 4 jours, ayant conservé leur belle coloration et leur teneur en eau (43 à 45 %), mis à —2° C. aussitôt leur obtention et transportés au laboratoire aux environs de 0°. Voici les conditions de prise des radiogrammes à la température de —6° C. : rayonnement filtré Kα de cuivre (λ 1,54 Å), tube Baudouin de grande puissance (35 KV — 25 MA), temps de pose 4 heures, distance des clichés 2^{cm},5 et 2^{cm}.

Sur aucun des clichés on ne voit trace de cristallisation; ni anneaux de Debye-Scherrer, ni taches de diffraction cristalline, mais seulement un halo rappelant la structure amorphe du type colloïdal. Même conclusion avec des cristaux partiellement desséchés en tunnel à basse température ou complètement à la température ordinaire sous vide sulfurique.

La forme nettement cristalline de l'oxyhémoglobine, comme pour d'autres protéines d'ailleurs, pourrait peut-être être rapportée à une *orientation micellaire* qui devrait être étudiée par des méthodes optiques.

5° L'hématine ou les différentes fractions hématiniques ainsi que la globine mises en liberté dans ces différentes expériences possèdent bien les caractéristiques des substances colloïdales.

Nous laisserons de côté les résultats cependant intéressants des recherches spectroscopiques, dans le rouge et l'orangé, concernant l'action des acides et des bases sur l'oxyhémoglobine.

Conclusions. — Ces travaux poursuivis pendant deux années grâce à une subvention de la Caisse des Recherches scientifiques, établissent qu'en *modifiant simplement l'équilibre ionique* d'une solution aqueuse d'oxyhémoglobine dans le *sens de l'acidité*, il est possible de floculer partiellement ou totalement son groupement chromophore. Les zones de pH favorables à cette pectisation sont comprises entre 4 et 1,18.

Les deux fractions globine et hématine sont deux colloïdes de charge électrique différente, la première se comporte comme une substance

électropositive et la seconde est nettement électronégative, comme vient de le démontrer M[lle] P. Berthier (²).

Il semble donc logique d'admettre désormais que l'oxyhémoglobine n'est pas une combinaison mais bien plutôt un *complexe de deux colloïdes, à l'état de gel, dispersés l'un dans l'autre* à la façon des solutions solides des alliages; cela explique leur difficile séparation complète, et sans doute aussi les propriétés spéciales de leur mélange. Il n'est pas exclu qu'au moment de la séparation, dans ces conditions expérimentales, l'un deux, l'hématine en particulier, subisse des modifications secondaires (oxydation, polymérisation etc.).

Ces résultats sont susceptibles d'ouvrir de nouveaux horizons sur les colloïdes biologiques et tout particulièrement sur leur association dans la constitution du protoplasma et de ses dérivés fonctionnels.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Analyse quantitative des hydrocarbures benzéniques par les spectres infrarouges.* Note (¹) de M[lle] **Berthe Manière**, présentée par M. Aimé Cotton.

L'étude conjuguée des spectres d'absorption infrarouge et Raman a permis de mettre au point des procédés d'analyse chimique applicables à l'étude des composés organiques (²). En ce qui concerne plus particulièrement les hydrocarbures, les techniques spectrales ont été suffisamment développées pour avoir conquis droit de cité dans l'industrie : l'essence dont on veut connaître la composition doit d'abord subir une superdistillation fractionnée (³); puis les fractions sélectionnées, d'après les points d'ébullition et les *points de trouble* dans l'aniline, font l'objet d'un examen spectral infrarouge et Raman.

Ce procédé a déjà permis de distinguer entre eux les hydrocarbures

(²) *Comptes rendus*, 207, 1938, p. 1254.

(¹) Séance du 17 février 1941.

(²) M. Aubert, *Mémorial des Sc. Phys.*, n° 43; A. Andant, *Publications du Ministère de l'air* n°s 21 et 29; J. Lecomte et P. Lambert, *Pub. du Min. de l'air*, n°s 34 et 142; R. Freymann, *Ann. Phys.*, 20, 1933, p. 243; P. Barchewitz, *Ann. Phys.*, 11, 1939, p. 261; *Ann. des combustibles liq.*, 14, 1939, p. 501.

(³) R. Sigwalt, *Bulletin de l'Association française des Techniciens du pétrole*, 49, mai 1939, p. 15.

saturés, cyclaniques et benzéniques, même quand ces composés forment des mélanges azéotropiques. En outre, on peut également distinguer ainsi le degré de ramification des carbures, problème important pour l'étude de la détonation dans les moteurs.

On ne s'était pas particulièrement occupé jusqu'ici d'effectuer des

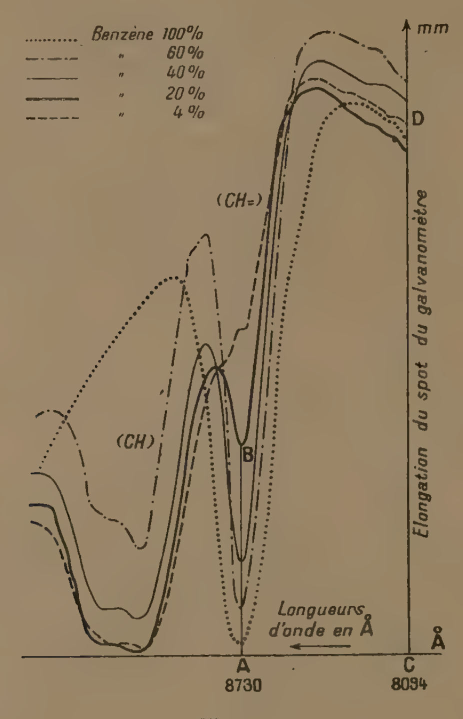


Fig. 1.

analyses *quantitatives* sur les hydrocarbures, par la méthode infrarouge. C'est ce que nous nous sommes proposé de faire, *en établissant des courbes d'étalonnage obtenues en dosant la quantité de benzène, toluène, ou xylène contenue dans un mélange de l'un de ces corps avec un carbure aliphatique saturé ou un cyclane*. Pour cela nous avons utilisé l'appareil décrit par Barchewitz [1] en nous astreignant aux conditions suivantes : 1° nous utilisons une cuve d'absorption de 20^{cm} de long renfermant 4^{cm^3} environ de substance; 2° pour une longueur d'onde donnée (8094 Å, soit 4047 Å dans le deuxième ordre du réseau, fournie par une lampe à mercure; cette région spectrale est assez éloignée des bandes d'absorption des hydrocarbures), nous prenons une sensibilité donnée de l'appareil (soit CD sur

la figure 1). Nous enregistrons alors le spectre du mélange étudié, par exemple benzène-hexane. *La teneur en benzène sera définie par l'intensité de la bande* (CH=) *à* 8730 Å *que nous déterminerons arbitrairement par le rapport* AB/CD (voir *fig.* 1).

Il importe d'ailleurs de préciser que cette définition n'est valable que pour l'appareil donné et reste liée à la courbe de sensibilité spectrale de la cellule photoélectrique utilisée.

Par ce procédé nous avons examiné les mélanges suivants : benzène-

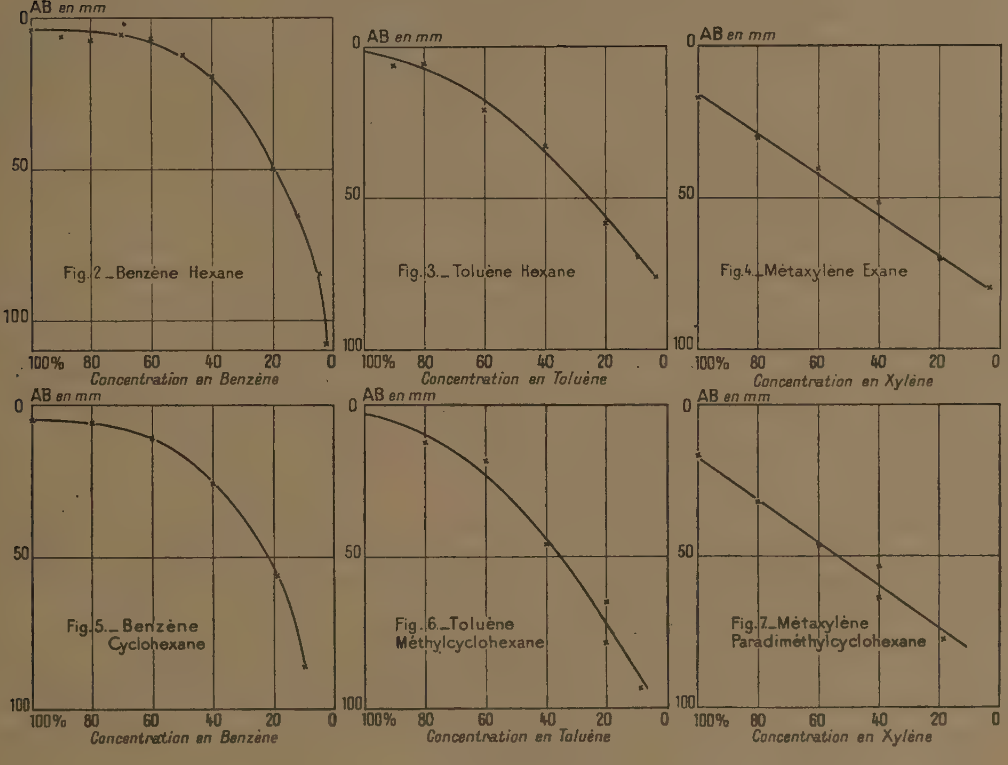


Fig. 2 à 7.

hexane, 80, 70, 60, 50, 40, 20, 12, 4, 2, % en volume; benzène-cyclohexane; toluène-hexane, toluène-méthylcyclohexane; *m*-xylène-hexane, *m*-xylène-*p*-diméthylcyclohexane 80, 60, 40, 20, 10, % en volume.

Les résultats obtenus sont portés comme suit sur les courbes : en abscisses, la teneur en benzène; en ordonnées, l'intensité arbitraire de la bande (*fig.* 2 à 7).

On remarquera que les courbes obtenues pour les carbures aliphatiques

saturés, ou cyclaniques ne diffèrent guère. Ceci montre que le dosage des carbures benzéniques est à peu près indépendant du corps qui est mélangé avec lui.

Ces courbes, une fois tracées, permettent de doser un carbure benzénique quelconque dans un carbure aliphatique quelconque (il sera bon toutefois de séparer, par une rectification grossière, le benzène du toluène ou du xylène). Il suffira, pour effectuer le dosage, de déterminer l'intensité de la bande (CH=) à 8730 Å et de se reporter à la courbe d'étalonnage.

La méthode, qui permet une précision de 5 % environ, a été appliquée avec succès à diverses essences : la confrontation des résultats obtenus avec les résultats fournis par effet Raman est extrêmement satisfaisante.

En résumé, *par une méthode qui ne demande que quelques minutes* (4), *n'utilise qu'environ* 4^{cm^3} *de substance, et ne nécessite pas l'emploi de la plaque photographique comme intermédiaire, on peut effectuer le dosage d'un carbure benzénique dans un carbure saturé.*

CHIMIE ANALYTIQUE. — *L'estimation des taux de benzopyrène dans les goudrons et dans les produits obtenus par distillation fractionnée.* Note (1) de M. **André Kling** et Mme **Marguerite Heros**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Nous avons décrit (2) une méthode optique qui permet d'évaluer approximativement le taux en benzopyrène contenu dans les goudrons. Nous rappelons que cette méthode utilise la mesure des variations d'opacité des bandes ultimes 4040 Å et 4270 Å du spectre de fluorescence des solutions de ce benzopyrène dans l'éther de pétrole, en fonction de leur concentration.

Nous avons appliqué cette méthode à des goudrons de provenances diverses, ainsi qu'à leurs produits de distillation : 1° huiles légères; 2° huiles lourdes; 3° huiles d'anthracène; 4° brais.

Pour apprécier les opacités des plaques photographiques, nous nous sommes servis d'un microphotomètre (à cellule photoélectrique).

---

(4) Rappelons que les spectres Raman demandent un temps de pose de l'ordre d'une heure et, en outre, l'emploi du microphotomètre.

(1) Séance du 24 février 1941.

(2) *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 2075.

Un traitement préalable, plus important que celui à faire subir aux goudrons, est nécessaire lorsqu'il s'agit d'appliquer la méthode aux huiles légères, lourdes, et aux huiles d'anthracène, en raison de la présence de quantités plus ou moins grandes d'anthracène qu'ils renferment, anthracène qui masque complètement les bandes de fluorescence du benzopyrène.

Pour faire disparaître cet inconvénient, nous avons procédé de la manière suivante :

On sait que l'anhydride maléique donne avec l'anthracène un produit d'addition équimoléculaire $C^{18}H^{12}O^{3}$ (F : 258°) (3) dont les liqueurs d'épuisement par l'éther de pétrole ne manifestent plus de fluorescence appréciable. Dans les mêmes conditions, la fluorescence du benzopyrène n'est pas sensiblement modifiée.

Les huiles légères lourdes et les huiles d'anthracène, sur lesquelles nous voulions faire porter nos évaluations, ont donc été traitées à l'ébullition, par l'anhydride maléique, en solution benzénique, durant 4 heures; puis, le benzène ayant été évaporé, on a traité l'extrait par la soude qui en a dissout la plus grande partie et, sur le résidu de ce traitement, on a fait agir l'éther de pétrole. La solution qui en est résultée a été décantée, lavée et traitée par l'acide sulfurique à 5 %, afin d'éliminer les produits basiques qu'elle pouvait renfermer. Les solutions dans l'éther de pétrole ainsi obtenues, après avoir été décantées et lavées, ne fournissent plus, d'une façon appréciable, le spectre de fluorescence de l'anthracène et se prêtent donc à notre mode d'évaluation du benzopyrène.

Les résultats que nous avons obtenus en opérant sur un certain nombre de produits d'origines différentes, résultats qui, nous le rappelons, peuvent être, au maximum, entachés d'une erreur de 50 %, ont été les suivants :

Pour les goudrons bruts, les moyennes des teneurs en benzopyrène 1.2 ont été trouvées de l'ordre de 3 à 8^g par kilogramme.

Ces goudrons ayant été fractionnés par distillation, les teneurs moyennes en benzopyrène 1.2 de chacune des fractions obtenues, ont été dans les huiles légères, traces indosables de benzopyrène; dans les huiles lourdes, petites quantités; dans les huiles d'anthracène, de l'ordre de $0^g,100$ par kilogramme; dans les brais, de l'ordre de 25 à 35^g par kilogramme.

Ces teneurs en benzopyrène trouvées par nous, dans les brais, étant de beaucoup plus élevées que celles décelées par d'autres auteurs à l'aide des méthodes chimiques, nous avons tenté d'isoler le benzopyrène de nos brais,

---

(3) E. Clar, *Ber. d. chem. Ges.*, 64, 1931, p. 2194-2200.

par distillation fractionnée (dans un vide de 1^{mm}) suivie de cristallisation des picrates, ainsi que l'avaient fait Cook et Hieger ([1]). Nous avons néanmoins modifié légèrement la méthode de ces derniers auteurs en substituant le cyclohexane au benzène pour faire cristalliser les picrates. Nous avons en effet constaté que le picrate de benzopyrène était beaucoup moins soluble dans le cyclohexane que dans le benzène, qu'en utilisant ce solvant on augmentait la différence de solubilité entre le benzopyrène lui-même et son picrate et qu'en outre, le picrate de benzopyrène étant soluble, à l'ébullition, dans le cyclohexane, puis recristallisant à froid, on pouvait de la sorte purifier le benzopyrène et le séparer d'avec d'autres picrates ne recristallisant pas aussi facilement que lui.

Ces tentatives d'isolement du benzopyrène à partir des brais nous ont donné les résultats suivants :

1° 10^g de brai, que l'on a distillés dans le vide, ne nous ont fourni que quelques milligrammes de benzopyrène *impur*;

2° avec 10^g de brai pulvérisés, additionnés de $0^g,500$ de benzopyrène 1.2, distillés de la même manière, nous n'avons obtenu que quelques milligrammes de benzopyrène impur.

Nous avons essayé également d'isoler le benzopyrène par dissolution dans divers solvants, et cristallisation des picrates, à partir des brais enrichis de notables quantités de benzopyrène (50 °/₀₀); elles se sont montrées également déficientes et ne nous ont permis d'isoler que quelques fractions de milligrammes d'un échantillon de 10^g d'un brai enrichi.

Ces résultats démontrent que le benzopyrène est très fortement adsorbé par les parties lourdes du brai qui ne l'abandonnent ni par distillation ni par cristallisation dans les solvants volatils.

Ainsi s'explique le désaccord entre la quantité de benzopyrène décelée d'une part par les méthodes chimiques, d'autre part par la mesure des intensités de fluorescence.

([1]) I. Hieger, *J. Chem. Soc.*, 1933, p. 395-396; Cf. *Chemical Abstract*, 27, 1936, p. 771; Cook, Hewett et Hieger, *ibid.*, p. 396-398.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur la chromoisomérie des dialcoylaniline-phénolphtaléines.* (1) Note de MM. **Paul Cagniant** et **Buu-Hoï**, présentée par M. Marcel Delépine.

Si de nombreux travaux ont été consacrés aux phtaléines dérivant de mono- ou de polyphénols, et ont pu préciser leur constitution, les phtaléines dérivées à la fois des dialcoylanilines $C^6H^5N(Alc)^2$ et des phénols sont encore fort peu connues. Quelques substances appartenant à cette famille ont été préparées par Otto Fischer et Römer, qui ont remarqué qu'elles se dissolvaient dans les alcalis en donnant lieu à des phénomènes de coloration, comme chez les phtaléines ordinaires (2). Depuis ce travail, les dialcoylaniline-phénolphtaléines sont tombées dans l'oubli le plus complet.

Il nous a paru intéressant de reprendre l'étude de ces substances afin d'établir leur constitution, et de voir si elles présenteraient aussi le phénomène de chromoisomérie que Mme Ramart-Lucas a pu mettre en évidence chez les hydroxyfuchsones (3) et chez les phtaléines ou sulfonephtaléines (4). Cette isomérie, de nature particulière, consiste, par exemple, en ce que la benzaurine (I) ou l'aurine (II) peuvent prendre, en

$$\begin{matrix} HO-C^6H^4 \\ C^6H^5 \end{matrix}\Big> C=C^6H^4=O \quad (I). \qquad \begin{matrix} HO-C^6H^4 \\ HO-C^6H^4 \end{matrix}\Big> C=C^6H^4=O \quad (II). \qquad A \rightleftharpoons B.$$

solution, deux formes colorées. Soient A et B ces deux formes.

L'expérience a montré que les dialcoylaniline-phénolphtaléines sont particulièrement favorables à l'étude de cette chromoisomérie. Nous avons observé en effet que ces substances, incolores en présence d'acide et en solution neutre, deviennent fortement colorées en milieu modérément alcalin; la couleur, dans ce dernier cas, varie avec la nature du solvant. La diméthylaniline-thymolphtaléine (III), par exemple, est rouge rose dans la soude alcoolique, rouge violacé dans la soude hydroalcoolique (50 % d'eau), et bleue dans la soude aqueuse, la concentration en alcali restant constante, et inférieure à N. Pour une concentration de soude

(1) Séance du 24 février 1941.

(2) O. Fischer et Römer, *Ber. d. chem. Ges.*, **42**, 1909, p. 2937.

(3) *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 1094.

(4) *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 1312.

< N/100, la phtaléine précipite de ses solutions aqueuses. Dans la soude N, il y a coloration bleue à chaud, et décoloration par refroidissement. Tous ces changements de couleur sont réversibles.

(III). (IV). (V).

L'étude spectrale montre que cette phtaléine possède en milieu neutre (courbe 1, *fig.* 1) la même absorption, et, par suite, la même constitution (III)

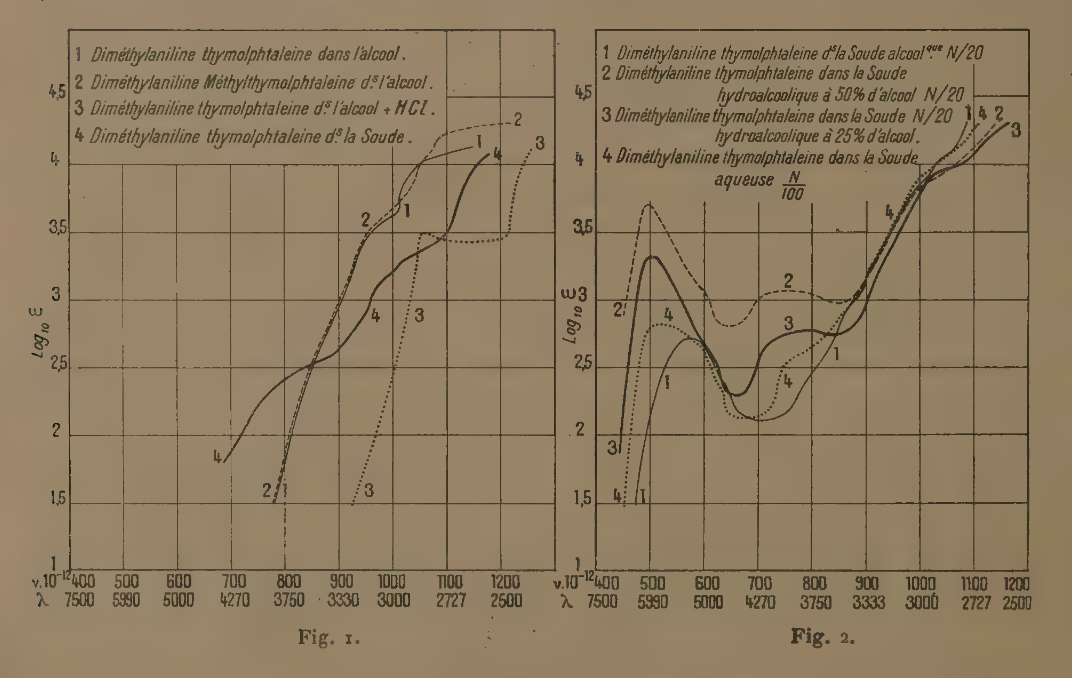


Fig. 1. Fig. 2.

que son éther-oxyde lactonique (IV) (courbe 2, *fig.* 1). Dans l'alcool chlorhydrique (courbe 3, *fig.* 1), il y a un déplacement hypsochrome analogue à celui qui accompagne la salification des amines aromatiques. Les solutions alcalines incolores, qui renferment la forme carbinolique (V),

absorbent aussi dans l'ultraviolet (courbe 4, *fig.* 1). Dans la soude alcoolique, l'absorption est déplacée vers le visible (courbe 1, *fig.* 2), et diffère totalement de celle des solutions dans la soude aqueuse N/100 (courbe 2, *fig.* 2) tant par l'intensité d'absorption que par le nombre et la position des bandes. Si l'on examine ces courbes, il apparaît que deux formes au moins se trouvent présentes : le maximum d'absorption de la bande la plus proche du rouge est situé pour l'une d'elles vers 5250 Å, et pour l'autre vers 6020 Å. Dans la soude hydroalcoolique (à 50 % d'alcool, courbe 3, *fig.* 2; à 25 % d'alcool, courbe 4, *fig.* 2), les deux formes sont présentes l'une et l'autre en quantités notables. La différence d'intensité d'absorption doit être attribuée au fait que ces solutions contiennent, en proportions variables, de la forme incolore.

Quelle est la structure de ces deux formes colorées (soient A et B ces deux isomères réversibles)? On pouvait envisager la présence, en milieu alcalin, de la forme *hydrate d'iminium* (VI). Mais, la phtaléine étant incolore dans ClH, et son éther-oxyde (IV) à la fois en milieu alcalin et acide,

(VI).

(VII).

$A \rightleftharpoons B$.

la forme (VI) est à écarter. Il en résulte que A et B répondent nécessairement à la structure quinonique (VII).

Les autres dialcoylaniline-phénolphtaléines présentent exactement les mêmes phénomènes de colorations multiples.

En résumé, ces substances donnent lieu, en milieu alcalin, à une chromoisomérie de même nature que celle découverte par M[me] Ramart-Lucas sur d'autres familles de colorants hydroxylés dérivés du triphénylméthane.

OPTIQUE CRISTALLINE. — *Diffusion moléculaire de la lumière dans les cristaux; calcul de l'intensité et de la polarisation des fréquences de pivotement des molécules.* Note [1] de M. **Auguste Rousset**, présentée par M. Aimé Cotton.

I. Raman et Nagundaki [2] ont attribué les raies Raman de faible fréquence (98 et 185 cm^{-1}) du nitrate de soude cristalisé à une oscillation de faible amplitude de l'ion NO^3 autour d'un axe de son plan. Si la vibration incidente est normale à l'axe de pivotement, le moment induit qui émet la raie Raman est normal au plan du pivot et de la vibration incidente. Mais, dans la plupart des cristaux, les axes de pivotement de la molécule (ou de l'ion) diffèrent des directions privilégiées du cristal, suivant lesquelles on peut polariser la vibration incidente ou analyser la vibration diffusée. Nous allons calculer, dans le cas général, les intensités relatives et la polarisation des fréquences de pivotement.

La molécule est maintenant définie par les cosinus directeurs (a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'') des axes OUVW de son ellipsoïde d'inertie par rapport au trièdre fixe OXYZ lié au cristal et par les réfractivités principales g, g', g'' supposées mesurées suivant OUVW. Le vecteur électrique $\vec{E}$ de l'onde incidente, de fréquence N, étant parallèle à OX, chacune des composantes E_u, E_v, E_w, d'amplitude a, a' et a'' induit dans la molécule pivotante des moments $\vec{M_u}$, $\vec{M_v}$, $\vec{M_w}$ de fréquences modifiées $N \pm u$, $N \pm v$, $N \pm w$, dont la direction et l'amplitude sont reportées dans le tableau ci-dessous.

	$\vec{M_u}$.	$\vec{M_v}$.	$\vec{M_w}$.
E_u......	O	$a(g''-g)$ [// à OW]	$a(g'-g)$ [// à OV]
E_v......	$a'(g''-g')$ [// à OW]	O	$a'(g-g')$ [// à OU]
E_w......	$a''(g'-g'')$ [// à OV]	$a''(g-g'')$ [// à OU]	O

Si le vecteur électrique $\vec{E}$ est parallèle à OY ou à OZ, il suffit dans ce tableau de remplacer a par b ou c. On obtient alors pour chacune des fréquences Raman de pivotement (u par exemple), le tenseur qui relie le vecteur électrique $\vec{E}$ de l'onde incidente et le moment induit $\vec{M_u}$ qui émet la raie Raman, rapportés aux axes OXYZ.

---

[1] Séance du 24 février 1941.

[2] *Nature*, 143, 1939, p. 679.

	E_x.	E_y.	E_z.
M_{ux}...	O	$(g'-g'')(b'a''-b''a')$	$(g'-g'')(c'a''-c''a')$
M_{uy}...	$(g'-g'')(a'b''-a''b')$	O	$(g'-g'')(c'b''-c''b')$
M_{uz}...	$(g'-g'')(a''c'-a'c'')$	$(g'-g'')(b''c'-b'c'')$	O

Les tenseurs relatifs à $\overrightarrow{M_v}$ et $\overrightarrow{M_w}$ se déduisent du tableau précédent par une permutation circulaire des indices de a, b, c, et de g.

II. Nous avons déjà signalé ([3]) que l'hypothèse des molécules pivotantes rend compte de la polarisation et des variations d'intensité observées par Kastler et moi-même sur les raies Raman de faible fréquence du naphtalène.

En supposant les axes de pivotement parallèles aux arêtes a et b de la maille cristalline, nous avions obtenu immédiatement la direction de la vibration diffusée et, par là, la valeur nulle ou infinie du facteur de dépolarisation i/I. Le signe de la polarisation observée, $I-i$, s'est toujours montré en bon accord avec nos prévisions.

Mais on connaît, par l'étude aux rayons X ([4]), l'orientation des axes des molécules de naphtalène dans la maille cristalline. Nous pouvons donc maintenant calculer les intensités relatives et les facteurs de dépolarisation des trois fréquences de pivotement $u=124$ cm^{-1}, $v=71$ cm^{-1} et $w=45$ cm^{-1}, dans chacun des douze cas réalisés expérimentalement, suivant les orientations relatives des arêtes a et b de la maille cristalline et de la vibration excitatrice.

Cas				$w=45$ cm^{-1}.	$v=71$ cm^{-1}.	$u=124$ cm^{-1}.
1	b // OZ	a // OY	E_z	∞ (F)	∞ (f)	∞ (ff)
2	–	–	E_y	2 (f)	6 (F)	≃ 0 (F)
3	–	a // OX	E_z	∞ (f)	∞ (f)	∞ (F)
4	–	–	E_y	0,4 (F)	8 (F)	2 (ff)
5	b // OY	–	E_z	∞ (f)	∞ (F)	∞ (ff)
6	–	–	E_y	0,12 (F)	1,5 (m)	≃ ∞ (F)
7	–	a // OZ	E_z	∞ (m)	∞ (F)	∞ (ff)
8	–	–	E_y	8 (F)	0,7 (f)	≃ 0 (F)
9	b // OX	a // OY	E_z	∞ (F)	∞ (f)	∞ (ff)
10	–	–	E_y	0,5 (f)	0,2 (F)	≃ ∞ (F)
11	–	a // OZ	E_z	∞ (ff)	∞ (f)	∞ (F)
12	–	–	E_y	3 (F)	0,12 (F)	0,5 (f)

L'accord des résultats expérimentaux avec les facteurs de dépolarisation

---

([3]) A. Kastler et A. Rousset, *Comptes rendus*, 212, 1941, p. 191.

([4]) Robertson, *Proc. Roy. Soc.*, A, 142, 1933, p. 674.

du tableau devient très étroit. En particulier, les valeurs de ρ comprises entre 0,5 et 2 laissent prévoir dans certains cas, des polarisations très incomplètes et par conséquent très éloignées des valeurs données (0 ou ∞) par notre hypothèse primitive : effectivement, comme l'exige la théorie, nous avons retrouvé sur certains de nos clichés, ces raies peu polarisées.

STRUCTURE CRISTALLINE. — *Structure atomique de la leucite.* Note de M. **Jean Wyart**, présentée par M. Charles Mauguin.

Les cristaux naturels de leucite $KAlSi^2O^6$, d'apparence cubique, sont toujours finement maclés et fournissent des spectres de rayons X compliqués dont l'interprétation a fait l'objet de différentes controverses. Utilisant de petits cristaux artificiels, non maclés, de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre, préparés par Ch. et G. Friedel ([1]), j'ai pu réaliser des diagrammes de cristal tournant avec le rayonnement $K\alpha$ du cuivre; confirmer que ces cristaux étaient bien la leucite; et retrouver les résultats que j'ai publiés ([2]) pour les cristaux naturels, toujours maclés.

La maille élémentaire est un prisme quadratique centré de paramètres $a = 12{,}95 \cdot 10^{-8}$ cm, $c = 13{,}65 \cdot 10^{-8}$ cm (précision 1/400). Elle renferme $16KAlSi^2O^6$ (densité mesurée 2,50; calculée 2,51).

Les réflexions observées sont : hkl avec $h+k+l=2n$; $hk0$ avec $h=2n$, $k=2n$; $00l$ avec $l=4n$.

L'existence des réflexions 334, 554, 774, 882 exclut les groupes $D_{4h}^{19}\, I4/amd$ et $D_{4h}^{20}\, I4/acd$. Et le seul groupe de symétrie qui rende compte des réflexions observées est $C_{4h}^{6}\, I4_1/a$. Les rayons X décèlent une hémiédrie centrée, annoncée par Ch. et G. Friedel à la suite de leurs observations des formes des cristaux artificiels. Chacun des atomes $KAlSi^2O^6$ occupent dans la maille une position générale; et le problème de la structure avec ses 30 paramètres ne peut être abordé directement. On est conduit à une solution approchée si l'on tient compte de l'action de la chaleur sur le minéral. Chauffé, il évolue progressivement vers une structure cubique qu'il atteint à 625°. A cette température la maille est un cube centré d'arête $a = 13{,}40$ Å; la symétrie étant celle du groupe $O_h^{10}\, Ia3d$. Et l'arrangement des atomes doit être très voisin de celui déterminé par

(1) *Bull. Soc. Min.*, 13, 1890, p. 129.

(2) 70e *Congrès Soc. Sav.*, 1937, p. 141; *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 1077.

W. H. Taylor pour l'analcime $NaAlSi^2O^6H^2O$, qui a même symétrie, celle du groupe $Ia3d$, une maille cubique centrée sensiblement de même dimension ($a = 13,7$ Å), avec un motif cristallin dont la constitution atomique est très analogue. Les 96 atomes d'oxygène, tous homologues, occupent des positions générales dans le réseau, déterminées par 3 paramètres; les atomes Si et Al, situés sur des axes binaires sont fixés par un seul paramètre et les atomes K occupent des points invariants. Les 30 paramètres à déterminer pour fixer la position des atomes dans le cristal quadratique se réduisent à 4 dans le cristal cubique. Comme la transformation à 625° est progressive et réversible, on peut penser que les atomes n'ont subi, au cours de cette transformation, que de petits déplacements. C'est ce que confirment les diagrammes de rayons X; et les intensités des réflexions, sur les différents plans réticulaires, que l'on peut calculer à partir d'une strūcture qui, en ce qui concerne les atomes O, Si et Al, et à l'exclusion des atomes alcalins, est celle proposée par W. H. Taylor pour l'analcime, sont en bon accord avec les intensités observées.

Ainsi les 96 atomes d'oxygène sont répartis dans le groupe quadratique $I4_1/a$ en 6 groupes de points homologues, voisins des 96 points du groupe $Ia3d$ homologues du point

$$x = 0,111; \qquad y = 0,131; \qquad z = 0,722.$$

Les 32 atomes Si sont en 2 groupes de points homologues de

$$x = 0,125; \qquad y = 0,161; \qquad z = 0,411;$$
$$x = 0,090; \qquad y = 0,625; \qquad z = 0,161.$$

Les 16 atomes Al sont homologues de

$$x = 0,161; \qquad y = 0,411; \qquad z = 0,125.$$

Les 16 atomes K sont homologues de

$$x = 0,107; \qquad y = 0,110; \qquad z = 0,130.$$

(L'origine des coordonnées dans le réseau quadratique a été choisie en un centre de symétrie.)

Les atomes Si et Al, étant au centre de tétraèdres quasi réguliers aux sommets desquels sont les oxygènes, la structure peut être envisagée comme un assemblage d'anneaux Si^4O^{12}, ayant la symétrie du sphénoèdre, liés entre eux par 2 ions Al; ou encore comme un assemblage d'anneaux hexagonaux $Al^2Si^4O^{18}$, de 6 tétraèdres $4\,SiO^4$ et $2\,AlO^4$, ayant un centre

de symétrie, liés entre eux par leurs atomes d'oxygène. Les atomes K sont entourés par 12 atomes O, à une distance de 3,5 Å. Cette distance, relativement grande, décèle une liaison peu solide de ces atomes dans le réseau; et l'on trouve ainsi une explication des pseudomorphoses faciles de la leucite en analcime.

Ainsi établie, la structure atomique éclaire la question encore obscure de la symétrie de la leucite et de silicates voisins. Le cristal au-dessus de 625°, a un réseau cubique ($a = c$); il a perdu sa biréfringence; les rayons X comme les rayons lumineux, sensibles seulement aux électrons qui entourent les noyaux atomiques, révèlent une symétrie cubique. Il faut conclure que la répartition électronique obéit à la symétrie du groupe cubique $Ia3d$; qu'en particulier, les noyaux des atomes Si et Al, nonobstant leurs différences, sont placés en des points homologues de l'assemblage cubique; ni la lumière, ni les rayons X, ni les propriétés élastiques (dilatation thermique), ne mettent en évidence la distribution à symétrie quadratique (mais à paramètre cubique) de ces noyaux. Et l'anneau structural $Al^2Si^4O^{18}$, où l'arrangement des noyaux atomiques n'a qu'un centre de symétrie, se comporte, dans tous les phénomènes étudiés, comme s'il possédait en plus un axe ternaire.

Le même point de vue doit sans doute être adopté pour l'analcime $NaAlSi^2O^6H^2O$ et la pollucite $CsAlSi^2O^6$. Ces deux minéraux, optiquement isotropes, sont, du point de vue électronique, cubiques. Et il semble que l'assemblage constitué par le motif $AlSi^2O^6$, qui se retrouve dans les trois silicates, atteigne sa symétrie maximum quand il se trouve dilaté, soit par action thermique dans la leucite, soit par les molécules H^2O dans l'analcime ($a = 13,7$ Å), soit par les gros ions Cs dans la pollucite ($a = 13,74$ Å). En tout cas, aucune donnée expérimentale ne permet de conclure à un arrangement quadratique des atomes d'oxygène comme le fait St. V. Naray-Szabo pour la pollucite [4]; car ces atomes, fortement polarisables, manifesteraient une biréfringence optique des cristaux; et les rayons X décèleraient un groupe de symétrie autre que le groupe cubique $Ia3d$, comme cela se produit dans la leucite dès que la température s'abaisse au-dessous de 625°.

---

[3] *Zeits. f. Krist.*, 74, 1930, p. 1.
[4] *Zeits. f. Krist.*, 99, 1938, p. 277.

GÉOGRAPHIE PHYSIQUE. — *Détermination des propriétés physiques des échantillons de boue des terrains polygonaux du Spitzberg.* Note de M. **Vsevolod Romanovsky**, présentée par M. Emmanuel de Margerie.

Les terrains polygonaux que j'ai eu l'occasion d'étudier au cours de ma mission au Spitzberg et que j'ai définis dans une précédente publication ([1]), sont constitués par des matériaux dont certaines propriétés physiques viennent d'être étudiées et sont condensées dans le tableau ci-dessous :

	Échantillon n° 1.	Échantillon n° 2.
Lieu	King's Bay	Cross Bay
Provenance	cassures polygonales	polygones de pierres.
Date de la récolte	23-8-39	13-8-39
Altitude	25^m	$2^m,5$
Formation géologique sous-jacente	moraine glacière	terrasse marine
Profondeur du sondage	$0^m,50$	$0^m,40$
Couleur de la boue	brun rougeâtre	noir verdâtre
Odeur	fétide	de décomposition
Poids spécifique	2,75	2,71
Indice des vides de la boue séchée	0,33	0,34
Teneur en eau naturelle	48,7 %	76,9 %
Limite de liquidité d'Atterberg	39,0 %	70,0 %
Limite de plasticité d'Atterberg	22,0 %	21,0 %
Indice de plasticité	17,0 %	49,0 %
Quantité de calcite	21,0 %	7,5 %
Quantité de matières organiques	3,7 %	6,7 %

Il ressort des mesures de granulométrie que l'échantillon n° 1 est dépourvu de pierres; il contient 9,5 % de sable et 90,5 % de poudre (inférieure à $0^{mm},07$) et de matière colloïdale. Dans l'échantillon n° 2 il y a 17,5 % de pierres inférieures à 1^{cm}, les pierres les plus grosses se plaçant à la périphérie et au fond du prisme polygonal ([2]), 19,9 % de sable et enfin 62,6 % de poudre et matière colloïdale. La phase poudre + colloïdes est identique dans les deux échantillons. On a donc, dans le premier cas, affaire à un *sable vaseux* et dans le second à une *vase sableuse* ([3]).

([1]) *Rev. Geogr. phys. et Géol. dyn.*, **12**, II, 1939, p. 315.
([2]) V. Romanovsky, *Comptes rendus*, **210**, 1940, p. 97-99.
([3]) Jacques Bourcart, *Comptes rendus*, **209**, 1939, p. 542.

L'étude au microscope a permis de se rendre compte de la constitution des deux échantillons. Pour le premier, la phase sableuse est formée par du quartz en grande quantité, la phase poudre est du quartz, de la calcite, des cristaux de rutile et du mica blanc décomposé. Le *liant* est constitué par du fer colloïdal et de l'humus. On trouve, en outre, beaucoup de diatomées et des spores de mousses. La composition de l'échantillon n° 2 se rapproche beaucoup de celle du précédent : le quartz est plus abondant et plus grossier, la calcite est moins fréquente; il y a plus de mica moins décomposé; on trouve le même liant. On observe, en outre, des diatomées, des algues vertes et des spicules d'éponges.

Dans le cas de l'échantillon n° 1, l'écart entre les limites de liquidité et de plasticité, suivant la méthode d'Atterberg, est de 17 %, et la différence entre la limite de liquidité et la teneur en eau naturelle est de 9,7 %. Pour l'échantillon n° 2, ces chiffres sont respectivement de 49 % et de 6,9 %.

La quantité de vase contenue dans l'échantillon n° 2, correspondant à des polygones de pierres, est donc suffisante pour rendre visqueux tout ce complexe, pour permettre à un régime tourbillonnaire de s'y installer et pour transporter des pierres à la périphérie. Pour l'échantillon n° 1, la quantité d'eau nécessaire étant plus faible, le régime tourbillonnaire s'établira plus tôt; dans ce cas le régime permanent n'a pas besoin d'être très intense, puisque, le milieu étant homogène, il n'a plus de pierres à transporter.

MÉTÉOROLOGIE. — *Sur la pente des surfaces de discontinuité du second ordre dans l'atmosphère.* Note de M. **Louis Cagniard**, présentée par M. Charles Maurain.

Soient Ox, y, z trois axes rectangulaires liés à la Terre; X', Y', Z' les composantes de la force par unité de masse (force d'inertie comprise); ρ la masse spécifique, p la pression. Suivant l'usage, qui semble bien justifié par l'expérience, je néglige les forces de frottement. Les équations du *mouvement* s'écrivent donc

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X', \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y', \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z'. \tag{1}$$

Successivement Helmholtz, Margulès, V. Bjerknes ont envisagé, avec le succès que l'on sait, l'existence de surfaces de discontinuité dans l'atmosphère. Au travers de telles surfaces, ρ, X', Y', Z' éprouvent des varia-

tions discontinues. Bjerknes traite également le cas particulier de ρ continu, X', Y', Z' discontinus et celui de X', Y', Z' continus, ρ discontinu.

A côté de discontinuités de ce type, que je nomme *discontinuités du premier ordre*, je pense qu'il est également avantageux d'envisager des discontinuités d'ordre supérieur, du second ordre en particulier. Une surface de discontinuité du second ordre sera caractérisée par la continuité de ρ, X', Y', Z', mais par la discontinuité de leurs dérivées partielles du premier ordre.

On voit sans peine que l'existence de surfaces de discontinuité du second ordre est analytiquement possible. Je propose d'admettre, jusqu'à preuve du contraire, que la tropopause, c'est-à-dire la surface séparant la troposphère de la stratosphère, est généralement assimilable à une surface de discontinuité du second ordre. D'où l'intérêt pratique des considérations qui suivent.

Je désignerai ci-dessous par Δf la grandeur de la discontinuité éprouvée par une fonction f quand on traverse la surface de discontinuité dans un sens déterminé. Si dx, dy, dz représentent les composantes d'un élément de courbe tracée sur la surface, la continuité des fonctions ρ, Z' permet d'écrire

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &dx\,\Delta\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+dy\,\Delta\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)+dz\,\Delta\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)=0,\\ &dx\,\Delta\left(\frac{\partial Z'}{\partial x}\right)+dy\,\Delta\left(\frac{\partial Z'}{\partial y}\right)+dz\,\Delta\left(\frac{\partial Z'}{\partial z}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Égalant entre elles les deux expressions distinctes que les équations (1) permettent d'obtenir pour une dérivée partielle mixte du second ordre de la fonction p, on obtient d'autre part

$$(3)\qquad X'\Delta\left(\frac{\partial\rho}{\partial Z}\right)+\rho\,\Delta\left(\frac{\partial X'}{\partial z}\right)=Z'\Delta\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+\rho\,\Delta\left(\frac{\partial Z'}{\partial x}\right),$$

$$(4)\qquad Y'\Delta\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)+\rho\,\Delta\left(\frac{\partial Y'}{\partial z}\right)=Z'\Delta\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)+\rho\,\Delta\left(\frac{\partial Z'}{\partial y}\right).$$

Multipliant (3) et (4) respectivement par dx, dy, ajoutant membre à membre et tenant compte de (2), il vient

$$(5)\qquad \begin{aligned}&\left[X'\Delta\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)+\rho\,\Delta\left(\frac{\partial X'}{\partial z}\right)\right]dx\\ &+\left[Y'\Delta\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)+\rho\,\Delta\left(\frac{\partial Y'}{\partial z}\right)\right]dy+\left[Z'\Delta\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)+\rho\,\Delta\left(\frac{\partial Z'}{\partial z}\right)\right]dz=0.\end{aligned}$$

L'équation (5) représente l'équation du plan tangent à la surface de

discontinuité. Elle est exprimée en fonction de coefficients accessibles à l'expérience. En effet, si X, Y, Z sont les composantes du champ de la pesanteur vulgaire, Ω_x. Ω_y, Ω_z celles de la vitesse angulaire, u, v, w celles de la vitesse relative, $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ celles de l'accélération relative, l'on a

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= X + 2(v\,\Omega_x - w\,\Omega_y) - \dot{u}, \\ Y' &= Y + 2(w\,\Omega_x - u\,\Omega_z) - \dot{v}, \\ Z' &= Z + 2(u\,\Omega_y - v\,\Omega_x) - \dot{w}. \end{aligned}\right.$$

Notons que $\Delta(\partial X/\partial z)$, $\Delta(\partial Y/\partial z)$, $\Delta(\partial Z/\partial z)$ sont rigoureusement nuls en raison de la continuité de ρ. Admettons, jusqu'à preuve du contraire, que $\Delta(\partial\dot{u}/\partial z)$, $\Delta(\partial\dot{v}/\partial z)$, $\Delta(\partial\dot{w}/\partial z)$ sont négligeables. Particularisons les axes : Oz désignera la verticale ascendante, Ox l'horizontale méridienne orientée vers le Sud, l'horizontale Oy étant orientée vers l'Est. Nous négligerons l'effet de la composante verticale w de la vitesse. En outre φ désignera la latitude géographique, g l'intensité de la pesanteur sur la surface de discontinuité. Il vient

$$(7)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\operatorname{tang}\varphi\,\frac{1}{1 - \dfrac{g}{2\Omega v\cos\varphi}\left[\dfrac{1}{1 + \dfrac{\frac{1}{v}\Delta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\frac{1}{\rho}\Delta\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)}}\right]},$$

$$(8)\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u}{v}\operatorname{tang}\varphi\,\frac{\frac{1}{\rho}\Delta\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \frac{1}{u}\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\frac{1}{v}\Delta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(1 - \frac{g}{2\Omega v\cos\varphi}\right)\frac{1}{\rho}\Delta\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)}.$$

Tous les nombres figurant dans (7) et (8) sont fournis par l'expérience lorsqu'on procède au lancement de ballons-sondes stratosphériques. On peut néanmoins simplifier notablement ces formules en conservant une approximation suffisante.

Si nous assimilons l'air à un gaz parfait, de température absolue T, et négligeons l'humidité spécifique, extrêmement faible à la température de la tropopause, on peut écrire

$$\frac{1}{\rho}\Delta\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = -\frac{1}{T}\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

Comme, d'autre part, $g/2\Omega v$ est au moins de l'ordre de 1000 et comme $\left|\dfrac{(1/v)\,\Delta(\partial v/\partial z)}{(1/\rho)\,\Delta(\partial\rho/\partial z)}\right|$ dépasse rarement 10, nous pourrons substituer aux for-

mules (7) et (8) les formules pratiquement équivalentes

$$(7\ bis) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2\Omega v \sin\varphi}{g}\left[1 - \frac{\frac{1}{v}\Delta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\frac{1}{T}\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)}\right],$$

$$(8\ bis) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2\Omega u \sin\varphi}{g}\left[1 - \frac{\frac{1}{u}\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\frac{1}{T}\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)}\right].$$

La pente de la surface de discontinuité, relativement aux surfaces de niveau de la pesanteur, s'annule à l'équateur ($\varphi = 0$). Elle s'annule aussi en même temps que la vitesse relative. D'où résulte qu'aux pôles la pente *moyenne* doit s'annuler également. Dans une circulation suivant les parallèles ($u = 0$), $\partial z/\partial y$ s'annule et la surface de discontinuité est normale aux plans méridiens.

ACTINOMÉTRIE. — *Relations entre les facteurs héliothermiques du climat dans la région parisienne*. Note de M. **Charles-Émile Brazier**, présentée par M. Charles Maurain.

C'est un fait bien connu que les différents facteurs capables de modifier les quantités d'énergie solaire parvenant à la surface du sol sous un climat donné, autrement dit les facteurs héliothermiques de ce climat, ne sont pas indépendants les uns des autres. Leurs relations sont cependant encore assez mal définies car, jusqu'à présent, on s'est préoccupé plutôt de déterminer séparément les variations de ces divers facteurs que d'étudier leurs réactions mutuelles. Il a donc paru intéressant de tenter de combler cette lacune pour le climat parisien en mettant à profit les documents rassemblés à l'Observatoire du Parc Saint-Maur.

Le tableau ci-après, établi d'après un Mémoire détaillé déposé en manuscrit dans les archives de cet Observatoire en attendant que les circonstances en permettent la publication, résulte de la discussion de deux années d'observations journalières simultanées réalisées en 1938 et 1939. Il met quantitativement en évidence l'interdépendance de la nébulosité, N, de la fraction d'insolation, δ/Δ, de la fraction de radiation

directe, G/G_0, et de la fraction de radiation diffusée, D/G_0 [1]. Tous les nombres qu'il contient, sauf ceux qui ont trait à la nébulosité, exprimés suivant la coutume en dixièmes de ciel ouvert, sont donnés en centièmes.

Valeurs mensuelles des principaux facteurs héliothermiques en fonction de la nébulosité à l'Observatoire du Parc Saint-Maur

(moyennes des années 1938 et 1939).

	Janvier.			Février.			Mars.			Avril.			Mai.			Juin.		
N.	δ/Δ.	S/G_0.	D/G_0.	δ/Δ.	S/G_0.	D/G_0.	δ/Δ.	S/G_0.	D/G_0.	δ/Δ.	S/G_0.	D/G_0.	δ/Δ.	S/G_0.	D/G_0.	δ/Δ.	S/G_0.	D/G_0.
0..	98	41	29	98	48	25	99	54	19	99	57	17	97	58	15	100	59	15
1..	90	35	32	92	43	26	93	47	22	93	51	20	91	52	18	93	52	19
2..	83	31	33	85	38	28	87	42	24	87	46	21	86	47	21	86	46	21
3..	75	26	34	77	32	30	80	37	27	80	40	24	79	41	23	80	42	23
4..	67	21	36	68	26	32	72	31	29	73	34	26	72	35	25	73	36	25
5..	58	17	36	58	21	32	64	25	31	64	27	29	65	29	27	65	31	26
6..	48	12	37	48	15	32	53	19	33	55	21	30	56	23	29	57	25	29
7..	37	8	35	37	10	33	42	13	34	44	15	30	47	17	29	48	20	30
8..	25	5	32	26	6	31	31	8	33	32	9	30	34	11	29	39	13	31
9..	13	3	27	14	3	28	18	4	30	18	4	27	19	5	27	26	8	29
10..	0	0	18	1	0	17	1	0	20	2	0	17	2	0	16	6	0	20

	Juillet.			Août.			Septembre.			Octobre.			Novembre.			Décembre.		
N.	δ/Δ.	S/G_0.	D/G_0.	δ/Δ.	S/G_0.	D/G_0.	δ/Δ.	S/G_0.	D/G_0.	δ/Δ.	S/G_0.	D/G_0.	δ/Δ.	S/G_0.	D/G_0.	δ/Δ.	S/G_0.	D/G_0.
0..	98	57	14	99	55	14	100	57	14	99	59	18	100	51	24	100	41	28
1..	93	52	17	93	49	18	94	51	18	93	52	21	95	47	25	93	36	30
2..	87	46	20	87	44	20	88	46	21	85	45	24	87	41	27	86	31	32
3..	81	41	23	81	39	22	82	41	23	77	38	27	79	35	29	77	27	33
4..	73	35	26	74	34	24	74	35	26	69	32	29	71	29	30	69	22	34
5..	65	28	29	66	28	27	66	29	28	60	26	30	61	23	31	59	18	35
6..	56	23	30	58	22	29	56	22	30	50	19	31	52	18	31	49	13	35
7..	46	16	32	48	17	30	46	16	31	40	14	31	41	12	32	39	10	34
8..	35	11	32	36	12	29	34	10	31	29	9	30	28	8	29	27	5	33
9..	22	6	29	23	6	28	20	5	27	16	3	28	15	3	27	13	2	29
10..	6	0	20	3	0	18	2	0	15	0	0	17	0	0	17	0	0	17

En formant la somme des nombres S/G_0 et D/G_0, on obtient la valeur

---

[1] G_0 est la radiation possible, c'est-à-dire la radiation globale que l'on mesurerait en l'absence d'atmosphère (voir *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 1249).

correspondante de la fraction de radiation globale, G/G_0. Le quotient de D/G_0 par G/G_0 donne ensuite la teneur, D/G, de la radiation globale en radiation diffusée.

Toutes ces données suggèrent un certain nombre de remarques dont les plus intéressantes paraissent être les suivantes.

Les variations que subissent les divers facteurs héliothermiques en fonction, soit de la nébulosité, soit de la fraction d'insolation, sont représentées par des courbes d'allure parabolique.

Les variations annuelles de la fraction de radiation directe et de la fraction de radiation diffusée, à nébulosité constante, sont inverses l'une de l'autre. Comme il se trouve que l'augmentation du premier de ces facteurs de l'hiver à l'été est presque complètement compensée par la diminution du second, il s'ensuit qu'à nébulosité constante, la fraction de radiation globale n'éprouve qu'une variation annuelle d'amplitude assez faible, de même sens que celle de la fraction de radiation directe et d'autant moins prononcée que la nébulosité est plus élevée. Par ciel dépourvu de nuages, cette amplitude n'atteint pas au total 10 % de la moyenne annuelle égale à 72. Par temps couvert, les moyennes mensuelles de G/G_0 oscillent autour de 18.

L'observation a montré que la teneur de la radiation globale en radiation diffusée est maximum en hiver et minimum en été. Sa marche annuelle étant à peu près parallèle à celle de la nébulosité, on a pensé que l'augmentation de ce dernier facteur de l'été à l'hiver suffisait à expliquer celle de la proportion de radiation diffusée. L'examen des nombres D/G formés comme il a été dit plus haut montre que, même si la nébulosité restait invariable au cours de l'année, la teneur de la radiation globale en radiation diffusée passerait par un maximum au voisinage du solstice d'hiver et par un minimum aux alentours du solstice d'été. L'amplitude de cette variation, comparée à celle révélée par l'observation et à la marche annuelle de la nébulosité, montre que la cause *principale* de l'augmentation de D/G pendant la saison froide est, non la fréquence plus grande des nébulosités élevées observée en cette saison, mais le fait que, le Soleil étant plus bas sur l'horizon, l'épaiseur atmosphérique traversée par les rayons solaires est plus grande.

C'est vraisemblablement à la même cause qu'il faut rapporter le déplacement que subit de l'hiver à l'été le maximum que présente la fraction de radiation diffusée pour les nébulosités comprises entre 5 et 8. Ce

maximum qui se place au solstice d'hiver entre les nébulosités 5 et 6 est reporté au solstice d'été entre les nébulosités 7 et 8. Son déplacement suit sensiblement le mouvement du Soleil en déclinaison.

ZOOLOGIE. — *Observations faites dans les régions arctiques.* Note de M. **Gontran de Poncins**, présentée par M. Paul Portier.

Au cours d'un voyage d'exploration et d'études ethnographiques chez les Eskimos du pôle magnétique nord, j'ai eu l'occasion de faire récemment quelques observations biologiques; je résume ici celles qui me paraissent présenter le plus d'intérêt.

1° *Sommeil des Phoques.* — Les Mammifères aquatiques doivent venir périodiquement respirer l'air. Lorsque la mer gèle, ils brisent d'un coup de tête, la couche de glace qui s'est formée. La mer gèle bientôt de nouveau au niveau de ce *trou de respiration*. Une nouvelle intervention du Phoque brise la nouvelle glace; de la sorte le trou de respiration se transforme peu à peu, en un véritable tunnel long de 5 à 6 pieds, dans lequel l'animal vient respirer périodiquement.

Chaque Phoque possède ainsi plusieurs trous de respiration qu'il *entretient*.

Pendant les mois de mai et juin, lorsque le Soleil reste constamment au-dessus de l'horizon et que ses rayons échauffent la banquise, les Phoques (1) sortent de leurs *trous de respiration* et dorment sur la surface gelée de la mer à environ 50^{cm} de leur trou afin de pouvoir, à la moindre alerte, s'y glisser et regagner l'eau.

Le sommeil des Phoques est intermittent. Toutes les 7 ou 20 secondes, l'animal se réveille, jette un regard circulaire autour de lui, puis laisse retomber la tête et se rendort.

Les Eskimos mettent à profit cette particularité pour s'approcher du Phoque. Pendant 6 à 7 secondes, ils courent vers l'animal, puis s'aplatissent, attendant le prochain réveil.

Procédant ainsi par bonds successifs, ils s'avancent jusqu'à une centaine de mètres de l'animal.

A ce moment, le chasseur change de tactique. Le Phoque a les yeux

---

(1) Deux espèces de Phoques existent dans ces régions, le *Phoca barbata* et le *Phoca annellata*.

organisés pour voir dans l'eau; il voit mal dans l'air. L'Eskimo le sait et, quand l'animal se réveille, il mime tous ses gestes avec une perfection telle que le phoque, le prenant pour un de ses congénères, le laisse parvenir jusqu'à lui. Il le saisit alors d'une main par une nageoire et de l'autre lui plonge un couteau à neige dans le thorax.

2° *Les Phoques et les Ours polaires se préservent des très grands froids.* — Pendant les très grands froids (40° et au-dessous), l'Ours blanc ne chasse pas; il se tient dans des sortes de tanières qu'il se ménage dans la neige contre la banquise. Ce n'est qu'à partir de mars, quand la température remonte, qu'il fait ses grandes randonnées le long du « pack » qui est l'endroit le plus favorable pour trouver des Phoques.

Quant aux Phoques, comme nous l'avons dit, ils dorment au Soleil; mais, si la température vient à baisser de quelques degrés ou si le vent se met à souffler, ils disparaissent. Ils sont retournés à l'eau, qui est plus chaude puisque sa température ne peut descendre au-dessous de — 2°C.

3° *Exploitation à la chaîne, par une série de prédateurs des proies capturées.* — L'Arctique est le *royaume de la faim.* C'est elle, et elle seule, qui dirige les hommes et les animaux vers l'exploitation la plus facile de la nourriture.

Ainsi s'organisent de véritables « circuits » de la faim, chacun cherchant à profiter des reliefs du repas de celui qui l'a précédé.

L'Ours polaire chasse le Phoque, soit dans les grandes failles qui s'ouvrent dans le *pack*, soit à l'affût aux *trous de respiration* cueillant d'un coup de patte l'animal au moment où il émerge.

L'Ours ne mange que le tissu adipeux du Phoque. Le Renard blanc qui l'a suivi à la trace prend sa place et mange la viande. L'Eskimo suit le Renard et pose ses trappes sur le circuit.

Les Caribous montent l'été, en énormes bandes vers le Nord; ils sont suivis par les loups des *Barren Lands.* Ceux-ci isolent un des ruminants, le tuent en lui sautant à la gorge en plein galop.

Le Renard de couleur suit le Loup et s'installe jusqu'à ce qu'il soit chassé par le *Carcajou* ([1]), animal diabolique qu'on n'arrive pas à capturer et qui souille tout ce qu'il ne peut pas manger.

Enfin l'Eskimo arrive et pose ses trappes autour des carcasses des animaux morts.

Les Lemmings (sortes de Chinchillas) sont suivis par les grands Hibous

---

([1]) *Taxidea americana.*

blancs de l'Arctique et aussi par les Renards, qui en font leur principale nourriture.

La présence de ces oiseaux, blancs l'hiver et marrons l'été, sont, pour les Eskimos, une indication précieuse de l'endroit où se trouvent les Renards.

De même le Faucon, en septembre, suit dans leur migration vers le Sud les petits *snowbirds* dont il fait sa proie.

Toxicité du foie de l'Ours polaire. — J'ai eu enfin l'occasion de constater d'une manière certaine la toxicité du foie de l'Ours polaire, toxicité bien connue des Eskimos qui, au contraire, apprécient beaucoup le foie du Phoque.

La séance est levée à 15h20m.

A. Lx.